“

La logique est l'hygiène des mathématiques

”

André Weil

REPRESENTATION DES DONNEES :
Types et valeurs de base (2)

- *Algèbre booléenne*

Numérique et Sciences Informatiques
1ère

Support de cours :
Jean-Christophe BONNEFOY

Objectifs :

- Maîtriser les opérateurs booléens
- Dresser la table de vérité d’une expression booléenne

1. DEFINITIONS :

Un élément logique est un système simple dont le comportement est caractérisé par 2 états stables qui s'excluent mutuellement

Exemple :

- Un interrupteur : ouvert ou fermé
- Une diode : passante ou bloquante
- Une proposition : Vraie ou fausse

Une variable logique symbolise l'état d'un groupe d'éléments dont le comportement est binaire. Par convention, on notera les 2 états « 1 » et « 0 » (ou « True » et « False »)

L'**algèbre booléenne (ou algèbre de Boole)**, est la partie des mathématiques, de la logique et de l'électronique qui s'intéresse aux opérations et aux fonctions sur les variables logiques. Elle fut initiée en 1854 par le mathématicien britannique George Boole. En Python, **ces variables logiques sont de type booléen**.

Dans le cas où « la représentation physique » de l'élément logique est un interrupteur, il existe deux façons de définir ce contact :

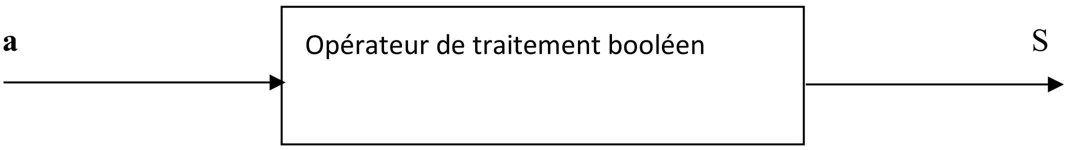
- Normalement Ouvert : le contact est ouvert au repos
- Normalement Fermé : le contact est fermé au repos

Contact à fermeture F ou NO (Normalement Ouvert)	Contact à ouverture O ou NF (Normalement Fermé)
	

2. OPERATIONS BOOLEENNES

2.1. Operations sur une seule variable

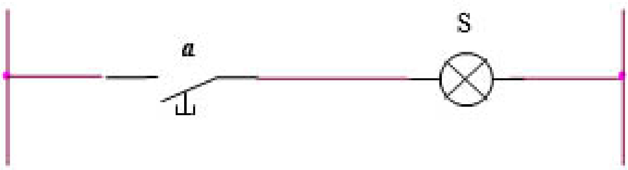
On considère « a » une variable logique et « S » le résultat logique obtenu après un traitement booléen (logique)



Opérateur OUI (YES) : La sortie est identique à l'entrée

Table de vérité et équivalence électrique

ENTREE	SORTIE
a	**S**
0	**0**
1	**1**

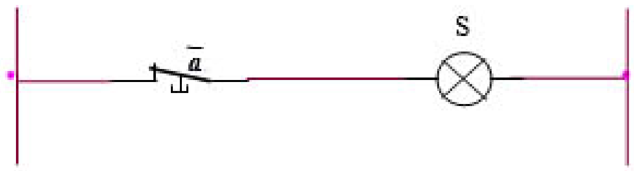


Equation : $S = a$

Opérateur NON (NOT) : La sortie est contraire à l'entrée

Table de vérité et équivalence électrique

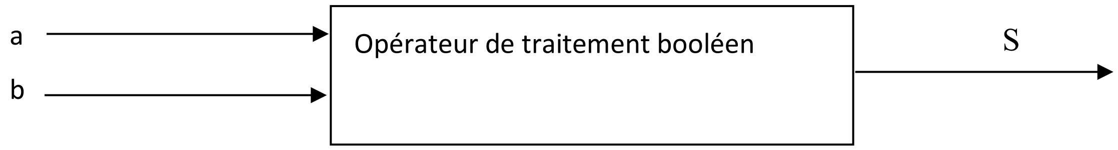
ENTREE	SORTIE
a	**S**
0	**1**
1	**0**



Equation : $S = \bar{a}$

2.2. Operations sur deux variables

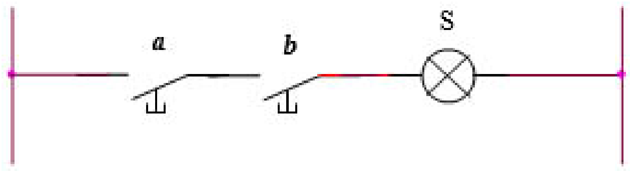
On considère « a » et « b » deux variables logiques et « S » le résultat logique obtenu après un traitement booléen (logique)



Opérateur ET (AND) : La sortie est Vraie si et seulement si « a est Vraie et b est Vraie ».
Elle correspond au **produit booléen**.

Table de vérité et équivalence électrique

ENTREES		SORTIE
a	**b**	**S**
0	**0**	**0**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

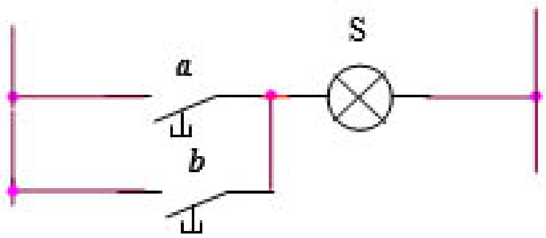


Equation : $S = a.b$

Opérateur OU (OR) : La sortie est Vraie si et seulement si a est Vraie ou b est Vraie ou a et b sont Vraies.
Elle correspond à la **somme booléenne**

Table de vérité et équivalence électrique

ENTREES		SORTIE
a	**b**	**S**
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**1**

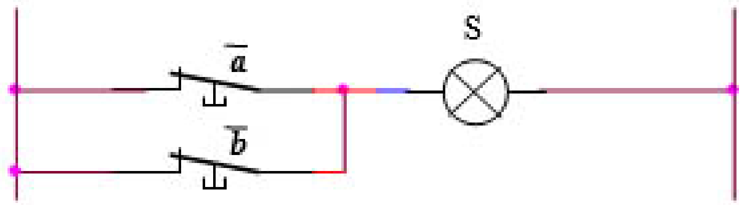


Equation: $S = a + b$

Opérateur NON-ET (NAND) : La sortie est contraire à l'opérateur ET

Table de vérité et équivalence électrique

ENTREES		SORTIE
a	b	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

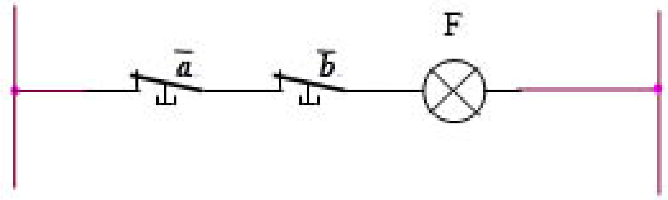


Equation : $S = \overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$

Opérateur NON-OU (NOR) : La sortie est contraire à l'opérateur OU

Table de vérité et équivalence électrique

ENTREES		SORTIE
a	b	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

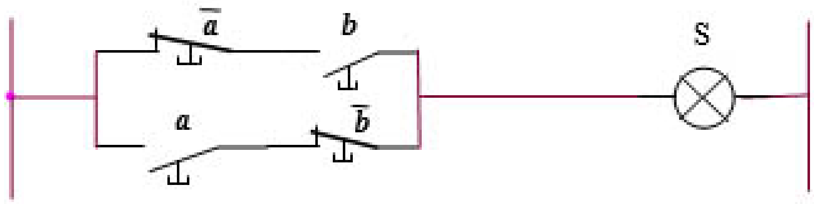


Equation : $S = \overline{a + b} = \overline{a}.\overline{b}$

Opérateur OU EXCLUSIF (XOR) : La sortie est Vraie si et seulement si a est Vraie ou b est Vraie (mais pas les 2 en même temps)

Table de vérité et équivalence électrique

ENTREES		SORTIE
a	b	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

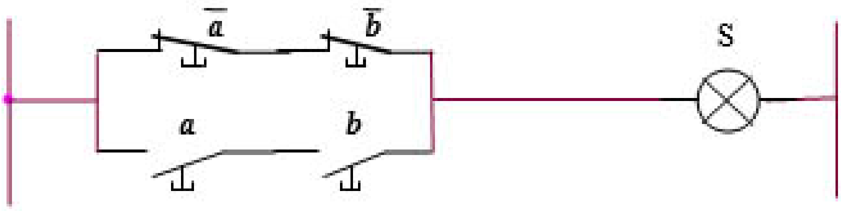


Equation : $S = \overline{a}.b + a.\overline{b}$

Opérateur NON OU EXCLUSIF (XNOR) : La sortie est contraire à l'opérateur XOR

Table de vérité et équivalence électrique

ENTREES		SORTIE
a	**b**	**S**
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**



Equation : $S = \bar{a}.\bar{b} + a.b$

3. PROPRIETES ET IDENTITES REMARQUABLES

3.1. Rappel des propriétés du ET et du OU

Commutativité
$a.b = b.a$
$a + b = b + a$

Associativité
$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
$(a.b).c = a.(b.c) = a.b.c$

Distributivité
$a.(b + c) = (a.b) + (a.c)$
$a + (b.c) = (a + b).(a + c)$

Remarque: Le **"et"** est prioritaire sur le **"ou"** au niveau de l'écriture des parenthèses.

3.2. Identités remarquables

Eléments neutres
$a.1 = a$
$a + 0 = a$

Eléments « absorbants »
$a.0 = 0$
$a + 1 = 1$

Idempotence
$a.a = a$
$a + a = a$

Complémentarité
$a.\bar{a} = 0$
$a + \bar{a} = 1$

Simplifications
$a.(\bar{a} + b) = a.b$
$a + (\bar{a}.b) = a + b$

3.3. Théorème de MORGAN

- $\overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$
- $\overline{a + b} = \bar{a}.\bar{b}$

Exemple : On a la fonction booléenne $X = [(a + b).c.(c + b)]$, donner l'expression simplifiée de $\bar{X}$

$\bar{X} = \overline{[(a + b).c.(c + b)]} = \overline{(a + b)} + \bar{c} + \overline{(c + b)} = \bar{a}.\bar{b} + \bar{c} + \bar{c}.\bar{b} = \bar{a}.\bar{b} + \bar{c}.(1 + \bar{b}) = \bar{a}.\bar{b} + \bar{c}.1 = \bar{a}.\bar{b} + \bar{c}$