Savoir DÉMONTRER LA MONOTONIE D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

1ère méthode : Démontrer que, si $a \leqslant b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$ pour une croissance (ou $f(a) \geqslant f(b)$ pour une décroissance).

Sous-méthode 1 : on étudie le signe de $f(a) - f(b)$ si f ne peut s'écrire avec les fonctions de référence.

C'est la méthode la plus compliquée, utilisée pour démontrer les monotonies des fonctions de référence $x \mapsto ax + b$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

Sous-méthode 2 : on transforme $a \leqslant b$ successivement jusqu'à $f(a) \leqslant f(b)$ pour une croissance (ou $f(a) \geqslant f(b)$ pour une décroissance) en utilisant la monotonie des fonctions de référence.

Elle est plus simple mais elle ne fonctionne pas lorsqu'il faut ajouter des plus petits et des plus grands :

par exemple, si $a \leqslant b$ et $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$, on ne peut rien dire de $a + \frac{1}{a}$ par rapport à $b + \frac{1}{b}$ ...

Attention !

Pour transformer $a \leqslant b$ en $a^2 \leqslant b^2$, il faut préciser que a et b sont positifs et justifier « *car la fonction carré est croissante sur* $[\, 0 \,;\, +\infty \,[$ (on peut dire $\mathbb{R}+$)».

Pour transformer $a \leqslant b$ en $a^2 \geqslant b^2$, il faut préciser que a et b sont négatifs et justifier « *car la fonction carré est décroissante sur* $]\, -\infty \,;\, 0 \,]$ (on peut dire $\mathbb{R}-$)».

Pour transformer $a \leqslant b$ en $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$, il faut préciser que a et b sont strictement positifs (ou strictement négatifs) et justifier « *car la fonction inverse est décroissante sur* $]\, 0 \,;\, +\infty \,[$ (ou *sur* $]\, -\infty \,;\, 0 \,]$) ».

Pour transformer $a \leqslant b$ en $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$, il faut préciser que a et b sont positifs et justifier « *car la fonction racine carrée est croissante sur* $[\, 0 \,;\, +\infty \,[$ ».

2ème méthode : Poser les fonctions de référence utiles et écrire f en fonction de celles-ci.
Utiliser les opérations <u>autorisées</u> sur les fonctions monotones (impossible par exemple un produit de fonctions, ou avec le carré d'une fonction...).

Attention !

Ne pas oublier la positivité de u avant d'utiliser $\sqrt{u}$.

Ne pas oublier la non nullité de u avant d'utiliser $\frac{1}{u}$.

Pour les quatre premiers exercices, on peut utiliser les deux méthodes, mais pas pour les deux derniers...

---

1. On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2x + 1}$.

Démontrer que f est décroissante sur $\left]\, -\frac{1}{2} \,;\, +\infty \,\right[$.

---

2. On donne la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x + 5}$.

Démontrer que g est croissante sur $[\, -5 \,;\, +\infty \,[$.

---

3. On donne la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Démontrer que h est croissante sur $\mathbb{R}+$.

---

4. On donne la fonction C définie par $C(x) = \frac{-2}{x^2 - 1}$.

Démontrer que C est croissante sur $]\, 1 \,;\, +\infty \,[$.

---

5. On donne la fonction φ définie par $\varphi(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

Démontrer que φ est décroissante sur $]-\infty \,;\, 0\,[$.

---

6. On donne la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$.

Démontrer que F est décroissante sur $]\,1 \,;\, 2\,[$.

---

7. On donne la fonction G définie par $G(x) = \left(\dfrac{1}{x} + 1\right)^2$.

a) Démontrer que G est décroissante sur $]\,0 \,;\, +\infty\,[$.

b) Démontrer que G est croissante sur $[-1 \,;\, 0\,[$.

c) Démontrer que G est décroissante sur $]-\infty \,;\, -1\,]$.

d) Établir le tableau de variations de G sur son domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}$.

---

8. On donne la fonction H définie par $H(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction H .

b) Démontrer que H est croissante sur $[\,3 \,;\, +\infty\,[$.

c) Démontrer que H est décroissante sur $]-\infty \,;\, -1\,]$.

d) Établir le tableau de variations de H sur son domaine de définition.
