Savoir DETERMINER LES CARACTERISTIQUES D'UNE VARIABLE ALEATOIRE

Rappels : Pour une expérience aléatoire à deux épreuves (deux lancers d'un dé, un lancer de deux dés, deux jetons piochées, etc...), vous pouvez décrire la situation au moyen d'un tableau à double entrée ou d'un arbre pondéré.
L'arbre pondéré est préférable dès qu'il y a beaucoup d'issues.
Pour trois épreuves ou plus, la seule méthode est l'arbre pondéré.

Un tirage simultané de deux objets correspond à deux tirages successifs sans remise.

L'exercice **1.** *travaille les techniques de base.*
Les autres sont des extraits d'exercices posés au Baccalauréat.

---

1. Dans chaque cas :

- déterminer la loi de probabilité,
- calculer l'espérance et en donner une interprétation (ne pas oublier l'unité),
- pour les questions *a)* , *b)* et *e)* , calculer l'écart type arrondi au centième.

a) On pioche une carte dans un jeu de 32 cartes.
Si c'est un cœur, on gagne 10 points, sauf si c'est le roi, on gagne alors 50 points.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de points gagnés.

b) On lance une pièce de monnaie équilibrée deux fois.
Si on fait deux piles, on gagne 5 €, si on fait deux faces, on perd 2 €, sinon on ne gagne ni ne perd.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique (*i.e.* positif ou négatif) en euros.

c) On lance deux dés simultanément.
La variable aléatoire X correspond à la somme des valeurs sorties.

d) On lance deux dés simultanément.
La variable aléatoire X correspond à la plus grande des valeurs sorties.

e) Une urne contient trois boules vertes et sept boules noires, indiscernables au toucher.
On pioche une boule deux fois de suite avec remise.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes piochées.

f) Une urne contient deux boules vertes et trois boules noires, indiscernables au toucher.
On pioche une boule trois fois de suite avec remise.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes piochées.

g) Un magasin lance un concours : 12 000 cartes à gratter sont glissées dans des paquets de gâteaux coûtant 2,50 € l'un.
Deux cents cartes permettent de gagner 100 €, mille cartes permettent de gagner 10 €, les autres sont des cartes perdantes.
On pose X la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros d'un client ayant acheté un paquet de ces gâteaux.

---

2. Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.
On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.

a) Vérifier que $P(X = 0) = \dfrac{3}{10}$.

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .
Donner une interprétation du résultat.

d) Calculer la probabilité de l'évènement suivant : A = « les deux boules tirées sont de même couleur ».

D'après Baccalauréat Nouvelle Calédonie novembre 2010

---

3. Pour une loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons : 10 jetons rouges sont gagnants, les autres sont blancs et ne rapportent rien.
Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton rouge tiré.
Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.
On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 € réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.

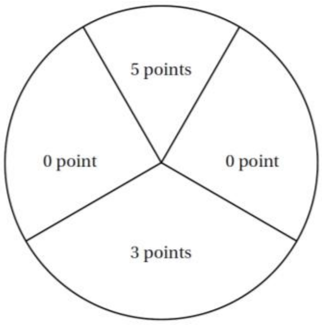
a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

D'après Baccalauréat Amérique du Nord 2012

---

4. Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

a) Le joueur lance une fléchette.
On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point, p_3 la probabilité d'obtenir 3 points et p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.
On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$.
Sachant qu'on a deux fois plus de chance de gagner 3 points que 5 points et qu'on a trois fois plus de chance de gagner 0 point que 5 points, déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.

b) Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum.
Le joueur gagne la partie s'il obtient un total supérieur ou égal à 8 points.
Si au bout de deux lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.
On note G_2 l'évènement « le joueur gagne la partie en deux lancers ».
On note G_3 l'évènement « le joueur gagne la partie en trois lancers ».
On note R l'évènement « le joueur perd la partie ».

1) Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $P(G_2) = \dfrac{5}{36}$.

On admettra dans la suite que $P(G_3) = \dfrac{7}{36}$.

2) En déduire $P(R)$.

c) Pour une partie, la mise est fixée à 2 €.
Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 €. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 €.
S'il perd, il ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie.

1) Donner la loi de probabilité de X.

2) Déterminer l'espérance mathématique de X.
Le jeu est-il favorable au joueur ?

D'après Baccalauréat Pondichéry 2011

---

5. Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

a) Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

b) Soient les évènements :

- E = « À l'issue de la partie, les deux cases obtenues sont rouges » ,
- F = « À l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».

Montrer que $P(\text{E}) = 0{,}02$ et $P(\text{F}) = 0{,}17$.

c) Si les deux cases obtenues sont rouges, le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge, le joueur reçoit 2 € ; sinon, il ne reçoit rien.
X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel le joueur mise 1 €).

1) Déterminer la loi de probabilité de X .

2) Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

D'après Baccalauréat Métropole septembre 2008

---

6. Le prix de chaque trajet est de dix euros.
En cas de contrôle, un voyageur qui aurait fraudé doit payer son billet et une amende de cent euros.

Soit X la variable aléatoire égale à la somme dépensée par un fraudeur à chaque trajet.

a) Sur un trajet, on admet que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à $0{,}05$.

1) Déterminer la loi de probabilité de X .

2) Calculer l'espérance mathématique de X .
La fraude est-elle favorable au voyageur ?

3) Un voyageur décide de ne jamais payer son billet.
En comptant deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois, soit au total quarante trajets, quelle somme doit-il consacrer à ses trajets mensuellement ?

b) La compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.
Dans cette question, on note p la probabilité d'être contrôlé sur un trajet.
Déterminer la valeur de p , arrondie à 10^{-3}, à partir de laquelle la fraude n'est plus favorable aux voyageurs.

D'après Baccalauréat Nouvelle Calédonie mars 2005

---

7. Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On fait piocher à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
Pour chaque boule blanche piochée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge piochée, il perd 3 euros.
On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

a) Démontrer que $P(\, X = -1\,) = \dfrac{20n}{(\,10 + n\,)\,(\,9 + n\,)}$.

b) Calculer, en fonction de n la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X .

c) Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut :

$$E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(10 + n)(9 + n)} .$$

d) Démontrer que ce jeu ne peut être équitable, quelque soit la valeur de n .

e) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le jeu est favorable au joueur.

D'après Baccalauréat Pondichéry 2010