Savoir CALCULER UN PRODUIT SCALAIRE

Rappel des méthodes :

Méthode 1 : Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dans une des trois positions de base :

- orthogonaux → $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$.
- colinéaires de même sens → $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\,\vec{u}\,\| \times \|\,\vec{v}\,\|$.
- colinéaires de sens contraires → $\vec{u}\,.\,\vec{v} = -\,\|\,\vec{u}\,\| \times \|\,\vec{v}\,\|$.

Méthode 2 : S'appuyer sur les angles droits pour projeter orthogonalement le sommet d'un vecteur sur la droite portant l'autre vecteur :

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonale de C sur (AB) .

On se retrouve alors avec deux vecteurs colinéaires.

Méthode 3 : Si les deux forment un angle connu : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\,\vec{u}\,\| \times \|\,\vec{v}\,\| \times \cos(\,\vec{u}, \vec{v}\,)$.

Qui peut s'écrire : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

Méthode 4 : Si la somme $\vec{u} + \vec{v}$ a une norme connue : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\,\|\,\vec{u}+\vec{v}\,\|^2 - \|\,\vec{u}\,\|^2 - \|\,\vec{v}\,\|^2\,\right)$.

Remarquer que $\|\,\overrightarrow{AB}\,\|^2 = AB^2$ et que $\|\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\,\|^2 = \|\,\overrightarrow{AC}\,\|^2 = AC^2$.

Mais on ne peut faire grand chose si la relation de Chasles ne s'applique pas...

Méthode 5 : Si on travaille dans un repère orthonormé : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy'$ où $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Le repère peut être défini dans l'énoncé, ou à choisir.

Méthode 6 : Utiliser les propriétés algébriques :

- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = -\vec{u}\,.(-\vec{v})$, qui peut s'écrire $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{DC}$.

  Astuce très utile pour avoir deux vecteurs de même origine ou deux vecteurs consécutifs.
- $(\,k\vec{u}\,).\vec{v} = k\,(\,\vec{u}\,.\,\vec{v}\,)$.
- décomposer un vecteur en somme de deux vecteurs et développer :

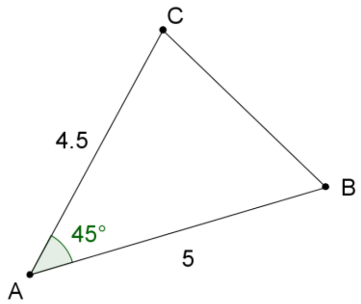
  $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{u}\,.\,(\,\vec{v_1} + \vec{v_2}\,) = \vec{u}.\vec{v_1} + \vec{u}.\vec{v_2}$ avec bien sûr $\vec{u}.\vec{v_1}$ et $\vec{u}.\vec{v_2}$ calculables.

  Astuce très utile pour s'appuyer sur des angles droits.

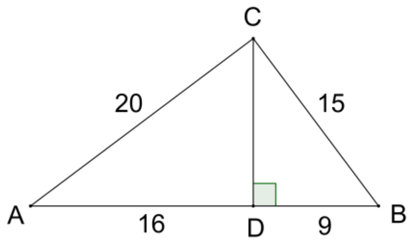
---

1. Dans chacun des cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

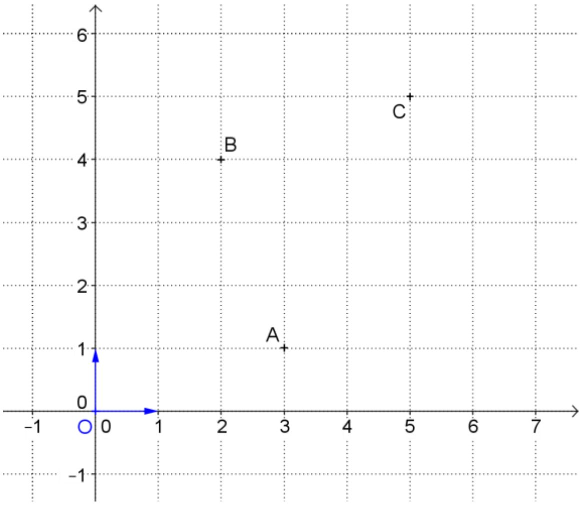
a)



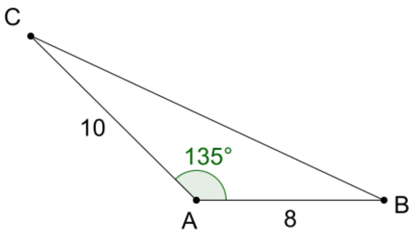
b)



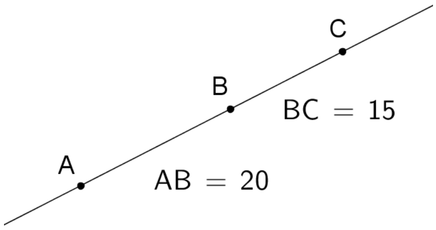
c)



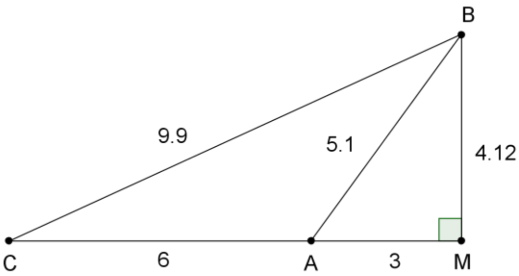
d)



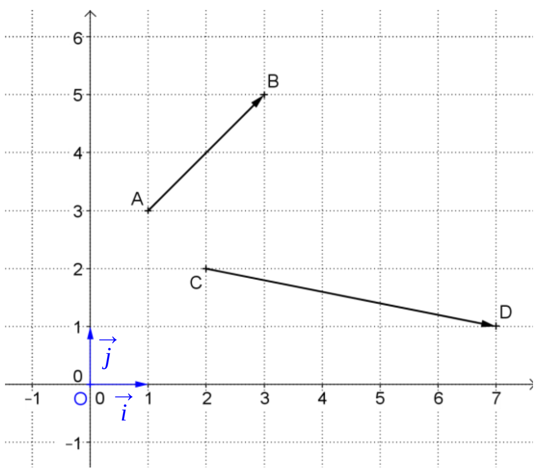
e)



f)



2. Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on définit les points ci-contre :



a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

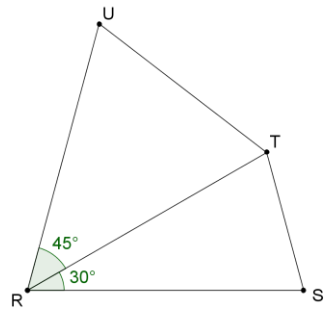
L'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ est-il aigu ou obtus ? Justifier.

b) Calculer $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$.

Que peut-on en déduire sur les droites (AD) et (BC) ?

3. On donne les points R , S , T et U tels que $RS = RT = RU = 6$ cm ,

$\widehat{SRT} = 30°$ et $\widehat{TRU} = 45°$.



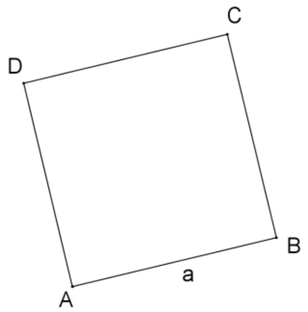
a) Calculer la valeur exacte de $\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{RT}.\overrightarrow{RU}$.

b) Calculer la valeur arrondie au centième de $\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{RU}$.

c) Déduire des questions précédentes $\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{TR}$, $\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{TU}$ puis $\overrightarrow{ST}.\overrightarrow{RU}$.

---

4. On donne un carré $ABCD$ de côté a .



a) Exprimer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de a .

b) On pose $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
Exprimer $\vec{u}.\vec{v}$ en fonction de a .

---

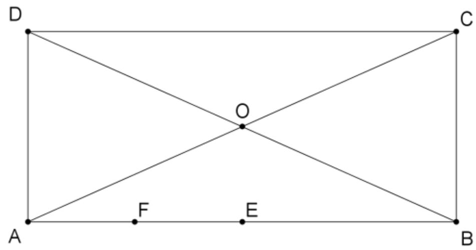
5. On donne le triangle EFG tel que $EF = 3$, $EG = 5$ et $FG = 6$.

Calculer $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FG}$ puis $\overrightarrow{GF}.\overrightarrow{GE}$.

---

6. On considère le rectangle $ABCD$ de centre O , et les points E et F milieux respectifs de $[AB]$ et $[AE]$.

On donne $AB = 40$ et $AD = 30$.



Partie A

Dans cette partie, on n'utilisera pas de repère orthonormé.

a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$.

b) Calculer $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BE}$.

c) Démontrer que $(OE) // (BC)$.

En déduire que E est le projeté orthogonal de O sur (AB) .

d) Calculer $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AF}$.

e) Calculer $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB}$.

Partie B

a) Définir un repère orthonormé, puis donner dans ce repère les coordonnées de chacun de points de cette figure.

b) Calculer chacun des produits scalaires de la **Partie A** en utilisant les coordonnées trouvées au *a)* .

---

7. On donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\| \vec{u} \| = 5$, $\| \vec{v} \| = 10$ et $\vec{u}.\vec{v} = -2$.

a) Calculer $(2\vec{u}).(\vec{u} + 3\vec{v})$.

b) Calculer $(3\vec{u} + \vec{v}).(3\vec{u} - \vec{v})$.

---

8. Étant donné un carré $ABCD$ de côté x, on pose I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[CD]$.

a) Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ en sommes de vecteurs pour déterminer $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}$.

b) Déterminer $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{AJ}$.

Que peut-on en déduire ?

---

9. On donne un rectangle $RSTU$ tel que $RS = 13$ cm et $RU = 6$ cm.

Étant donné un point $M \in [RS]$, on pose $RM = x$ cm.

a) Démontrer que $\overrightarrow{MT}.\overrightarrow{SU} = 13x - 133$.

En déduire pour quelle valeur de x les droites (MT) et (SU) sont perpendiculaires.

b) Exprimer $\overrightarrow{MT}.\overrightarrow{MU}$ en fonction de x.

En déduire pour quelles valeurs de x les droites (MT) et (MU) sont perpendiculaires.
