Savoir CALCULER DES TERMES D'UNE SUITE

Rappels :

Une suite peut être présentée :
- par un premier terme et une relation de récurrence, donnant u_{n+1} en fonction de u_n ,
- par une formule explicite, donnant u_n en fonction de n ,
- par une formule mixte, donnant u_{n+1} en fonction de u_n et de n ,
- de manière bizarre...

Les calculs de termes demandés peuvent être :
- calculer un terme connaissant son rang,
- calculer un terme connaissant le terme précédent.

Attention, on peut rencontrer aussi beaucoup de calcul littéral...
On peut demander :
- exprimer u_n en fonction de n ,
- exprimer u_{n+1} en fonction de n ,
- exprimer v_n en fonction de u_n , ...

Les exercices **1.** *et* **2.** *travaillent toutes les techniques de base.*

Les autres sont des extraits d'exercices posés au Baccalauréat : les **4.** *,* **5.** *et* **6.** *utilisent une relation mixte, les* **7.** *et* **8.** *sont assez difficiles, le* **9.** *est bizarre et les quatre derniers exercices présentent le principe de deux suites imbriquées (on les rencontre essentiellement dans les exercices réservés aux élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité mathématiques, mais pas toujours, voir l'exercice* **12.** *).*

---

1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Parmi ces questions, trouvez celle qu'on ne peut pas raisonnablement vous demander et ne la faites pas !

a) Calculer le terme de rang 3 .

b) On donne le terme 8 189 .
Calculer le terme suivant.

c) Calculer le 6ème terme.

d) On donne le terme 1 021 .
Calculer le terme précédent.

e) Calculer le terme de rang 20 .

f) On donne $u_n = 61$.
Calculer u_{n+2} .

g) Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n .

---

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = \dfrac{2}{n-1} + 3$ pour tout $n \geqslant 2$.

a) Calculer les trois premiers termes.

b) On donne le terme 3,2 .
Calculer le terme suivant.

c) Calculer le terme de rang 101 .

d) Calculer le 16ème terme.

e) Exprimer v_{n+1} en fonction de n .

f) On pose $2k + 1$ un entier impair.
Exprimer v_{2k+1} en fonction de k .

Montrer qu'on peut utiliser cette formule pour calculer le terme de rang 101 d'une autre manière.

---

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$.

Calculer u_1 et u_2.

D'après Baccalauréat Polynésie 2013

---

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.

D'après Baccalauréat Pondichéry 2010

---

5. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n}u_n. \end{cases}$

Calculer u_2, u_3 et u_4.

D'après Baccalauréat Antilles 2012

---

6. Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.

Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4, puis calculer T_1, T_2, T_3 et T_4.

D'après Baccalauréat Métropole 2013

---

7. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$.

a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

b) Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3 ou 4, alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

c) Établir que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

d) Exprimer de même $u_{n+1} + 1$ en fonction de u_n.

On suppose que les termes u_n sont tous différents de -1.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

e) Établir que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{3}v_n$.

f) On suppose que les termes v_n sont tous différents de 1.

Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \Leftrightarrow u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

D'après Baccalauréat Métropole Septembre 2013

---

8. On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = -1 \text{ et } u_1 = \dfrac{1}{2} \\ \text{pour tout entier naturel } n\text{ , } u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4} u_n \text{ .} \end{cases}$

a) Calculer u_2 .

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2} u_n$.

b) Calculer v_0 .

c) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n$.

On suppose que les termes v_n sont tous non nuls.
On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

d) Calculer w_0 .

e) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et de v_n .

En déduire que, pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = w_n + 2$.

D'après Baccalauréat Antilles Septembre 2010

---

9. Soit la suite numérique (r_n) définie sur $\mathbb{N}$ et telle que, pour tout entier naturel n , r_n est le reste de la division euclidienne de 3^n par 7 .

Pour $0 \leqslant n \leqslant 6$, calculer les termes r_n .

D'après Baccalauréat Pondichéry 2000

---

10. On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux.
Pour tout entier naturel n , on note j_n le nombre d'animaux jeunes après n années d'observation et a_n le nombre d'animaux adultes après n années d'observation.
Il y a au début de la première année de l'étude, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes.
Ainsi $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.
On admet que, pour tout entier naturel n , on a $\begin{cases} j_{n+1} = 0{,}125 j_n + 0{,}525 a_n \\ a_{n+1} = 0{,}625 j_n + 0{,}625 a_n \text{ .} \end{cases}$

Calculer le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un an d'observation, puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).

D'après Baccalauréat Pondichéry 2013 - Exercice de spécialité

---

11. Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution de nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.
En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.
Pour tout entier naturel n , on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la $n^{\text{ème}}$ année après 2013, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la $n^{\text{ème}}$ année après 2013.
Ainsi, $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.
Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}7 a_n + 0{,}2 b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0{,}1 a_n + 0{,}6 b_n + 70 \text{ .} \end{cases}$$

Calculer le nombre d'abonnés de chaque opérateur trois années après 2013.

D'après Baccalauréat Polynésie 2013 - Exercice de spécialité

---

12. Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.

D'après Baccalauréat Nouvelle Calédonie Novembre 2013

---

13. On étudie la population d'une région imaginaire.
Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.
L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

- l'effectif de la population est globalement constant,
- chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année $(2013 + n)$ et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n.

D'après Baccalauréat Métropole 2013 - Exercice de spécialité
