Savoir UTILISER UNE SUITE ARITHMÉTIQUE POUR ÉTUDIER UNE SUITE QUELCONQUE

Méthodes :

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on peut montrer que u_n est de la forme $an + b$, c'est très efficace... mais vous aurez ici à utiliser des formules de récurrence.

On utilisera donc l'une des deux méthodes suivantes :
- exprimer u_{n+1} en fonction de u_n sous la forme u_n + constante ,
- ou calculer $u_{n+1} - u_n$ et obtenir une constante.

La première méthode est plus rapide mais, si l'expression est compliquée, on n'arrive parfois pas à en extraire u_n !

Les exercices **1.** *et* **2.** *montrent chacune de ces deux méthodes.*

Principe :

On vous donne une première suite (u_n) quelconque, définie par la relation de récurrence $\boxed{(R_1) : u_{n+1} \text{ en fonction de } u_n}$, en général plutôt compliquée.

On vous donne une deuxième suite (a_n) définie par $\boxed{(R_2) : a_n \text{ en fonction de } u_n}$.

En mélangeant (R_1) et (R_2), vous calculez a_{n+1} ou $a_{n+1} - a_n$ pour démontrer que (a_n) est arithmétique.

Vous en déduisez $\boxed{(R_3) : a_n \text{ en fonction de } n}$ avec l'expression explicite des termes d'une suite arithmétique $a_n = a_0 + rn$.

Il vous faudra trafiquer (R_2) par équivalence pour isoler u_n et obtenir $\boxed{(R_4) : u_n \text{ en fonction de } a_n}$.

Il restera à injecter (R_3) dans (R_4) pour obtenir $\boxed{(R_5) : u_n \text{ en fonction de } n}$.

---

1. Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 - u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 .

b) En observant les valeurs trouvées au *a)* , conjecturer les valeurs de u_4 et u_5 .

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{1}{u_n}$.

Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n .

En déduire que (a_n) est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.

d) Exprimer a_n en fonction de n .

e) En déduire u_n en fonction de n .

f) Confirmer la conjecture faite au *b)* , puis calculer u_{100} .

---

2. On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$.

a) Calculer v_1 , v_2 et v_3 .

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

b) Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

c) En déduire l'expression de w_n en fonction de n .

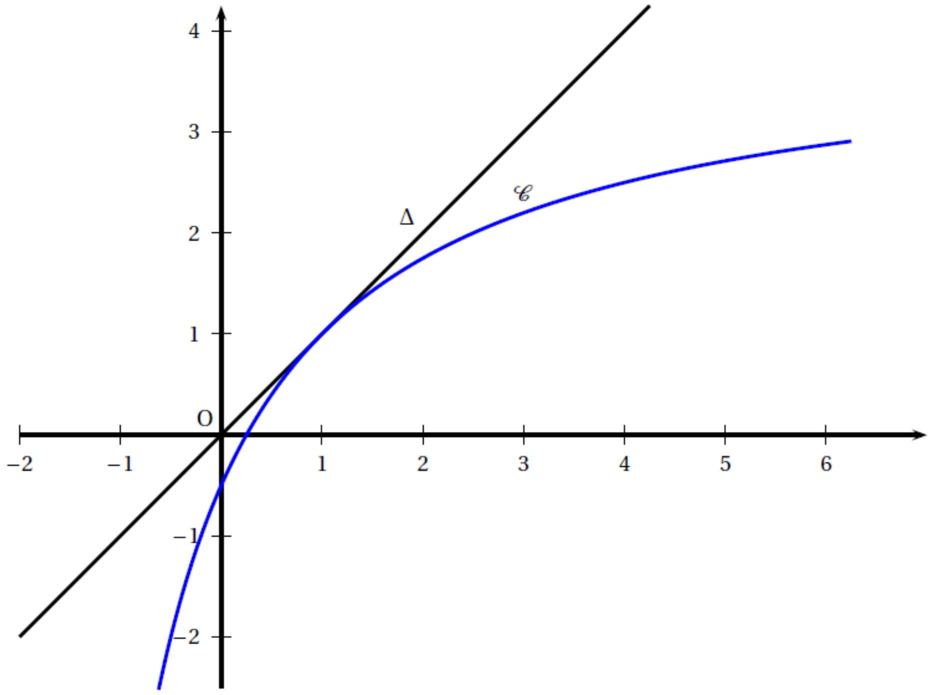
d) Pour tout nombre entier naturel n , exprimer v_n en fonction de w_n , puis en fonction de n .

D'après Baccalauréat Liban 2013

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) On donne ci-dessous une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.
Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la limite de la suite (u_n) ?



Dans la suite de l'exercice, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.
Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

c) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

d) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n.

e) Calculer les valeurs exactes, puis arrondies à 10^{-4} de u_{100}, u_{101} et u_{102}.

En quoi les valeurs trouvées permettent de confirmer ou d'infirmer les conjectures faites au *a)* ?

D'après Baccalauréat Métropole Septembre 2010