Savoir UTILISER UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE POUR ÉTUDIER UNE SUITE QUELCONQUE

Méthodes :

Pour démontrer qu'une suite (g_n) est géométrique, on peut montrer que g_n est de la forme $b \times a^n$, c'est efficace mais rarement utilisable.

Il reste alors une des deux méthodes suivantes :

- exprimer g_{n+1} en fonction de g_n sous la forme $g_n \times$ constante ,
- ou calculer $\dfrac{g_{n+1}}{g_n}$ et obtenir une constante, mais cette méthode nécessite de démontrer que les termes sont non nuls et positifs, ce qui ne sera pas possible dans les exercices proposés…

Il ne reste donc qu'une méthode !

Comme dans la fiche *SOS SU 05 - Utiliser une suite arithmétique pour étudier une suite quelconque*, on utilise le même principe d'utilisation d'une suite annexe sympathique (cette fois géométrique) pour étudier une suite (u_n) quelconque pas sympathique :

- on calcule quelques premiers termes de (u_n) et, parfois, on conjecture ;
- on démontre qu'une suite annexe (g_n) est géométrique ;
- on en déduit l'expression de u_n en fonction de n ;
- on se sert de cette expression explicite pour étudier (u_n) (calculs de termes, variation, limite, somme de termes, ...).

Les exercices **1.** *à* **4.** *montrent les deux niveaux de difficultés calculatoires.*
Les exercices **5.** *,* **6.** *et* **7.** *utilisent une définition mixte (récurrence et explicite), mais sans difficulté supplémentaire.*
Les très beaux exercices **8.** *et* **9.** *présentent une suite qui s'exprime avec deux suites, une arithmétique et une géométrique. Pour s'aguerrir…*

---

1. Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,U_n - \dfrac{3}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} . \end{cases}$

a) Calculer U_1 et U_2 .

b) On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $V_n = U_n + 3$.
Démontrer que (V_n) est géométrique.

c) Exprimer V_n en fonction de n .

d) Exprimer U_n en fonction de V_n , puis en fonction de n .

e) Calculer $S = V_o + V_1 + ... + V_{10}$.

En déduire $S' = U_o + U_1 + ... + U_{10}$.

---

2. On considère la suite (u_n) définie $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1 + 2u_n}$.

a) Calculer u_1 et u_2 .

On suppose que tous les termes de la suite (u_n) sont différents de 1 et on définit la suite (v_n) pour tout n entier naturel par $v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n}$.

b) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c) Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .

d) Justifier que (v_n) est croissante.

En déduire que, pour tout entier naturel n , v_n ne peut être égal à -1 .

e) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = \dfrac{v_n}{1 + v_n}$.

En déduire u_n en fonction de n .

f) Calculer la valeur exacte, puis l'arrondi à 10^{-5} de u_{10} .

Que peut-on conjecturer ?

D'après Baccalauréat Polynésie 2013

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 1{,}2$.

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

D'après Baccalauréat ES Liban 2013

---

4. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{pour tout entier naturel } n\text{ , } u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} \end{cases}$.

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

a) Calculer les valeurs approchées à 10^{-2} près de u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n , v_n ne peut être égal à 1 *(Raisonner par l'absurde)* .

c) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

En déduire l'expression de v_n en fonction de n .

d) Exprimer u_n en fonction de v_n , puis en déduire que $u_n = \dfrac{3 + (-\frac{1}{3})^n}{3 - (-\frac{1}{3})^n}$.

D'après Baccalauréat Métropole Septembre 2013

---

5. On considère la suite (u_n) définie $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

a) Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - n + 1$.

c) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

d) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 3^n + n - 1$.

e) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n$ est strictement positif.

Que peut-on en déduire quant à la conjecture faite au *b)* ?

D'après Baccalauréat Liban 2012

---

6. L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{n\,u_n + 1}{2\,(n+1)}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

On définit une suite auxiliaire (v_n) pour tout entier $n > 1$ par $v_n = n\,u_n - 1$.

<u>*Indication*</u> *: Attention, le premier terme n'est par* u_0 *mais* u_1 !
Vous ne pourrez donc pas utiliser la forme explicite habituelle des termes d'une suite géométrique...

a) Calculer u_2 et u_3 .

b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

c) En déduire que, pour tout entier naturel $n > 1$, on a $u_n = \dfrac{1 + (0{,}5)^n}{n}$.

d) Calculer les arrondis au millième de u_{10} et u_{20} .

D'après Baccalauréat Centres Etrangers 2013

---

7. Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Calculer $\sum_{k=0}^{3} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$.

On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

c) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

d) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

e) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

Exprimer S_n puis T_n en fonction de n.

D'après Baccalauréat Métropole 2013

---

8. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n peut s'écrire $g_n + a_n$, somme d'un terme d'une suite géométrique $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'un terme d'une suite arithmétique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On en précisera la raison et le premier terme.

d) Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

D'après Baccalauréat Pondichéry 2010

---

9. On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = -1 \text{ et } u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$

a) Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

b) On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n, $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

1°) Calculer v_0.

2°) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

3°) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

4°) Exprimer v_n en fonction de n.

c) On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n, $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

1°) Calculer w_0.

2°) Exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

3°) En déduire que la suite (w_n) est arithmétique de raison 2.

4°) Exprimer w_n en fonction de n.

d) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

D'après Baccalauréat Antilles Septembre 2010
