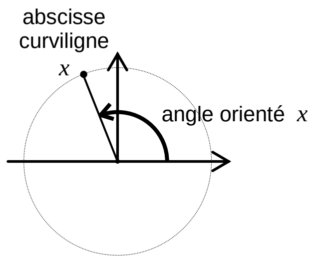
Savoir CALCULER LA VALEUR EXACTE D'UN COSINUS OU D'UN SINUS

Attention, pour une lecture plus facile, on a confondu angles orientés et abscisses curvilignes...



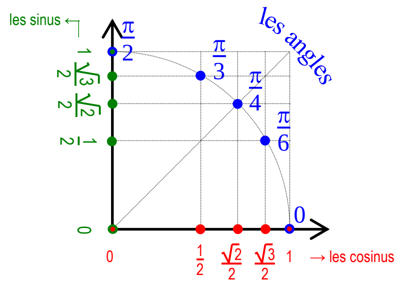
Rappel des connaissances :

On connait les valeurs exactes de $\cos x$ et $\sin x$ lorsque x vaut les mesures usuelles, en radians : 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

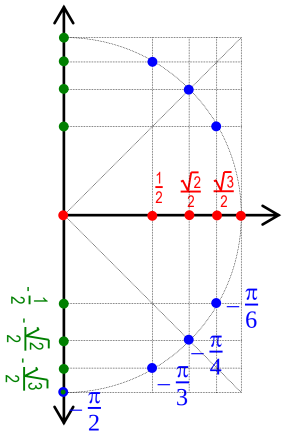
Voir exercice **1.** .

Ou alors, on me donne la valeur exacte de $\cos x$ ou de $\sin x$ lorsque x vaut une mesure non usuelle.

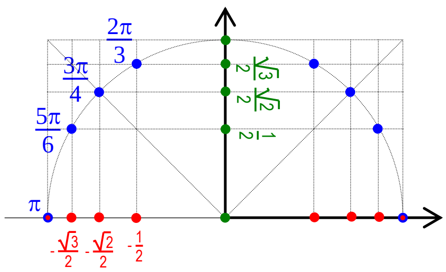
Voir exercices **2.** *et* **3.** .



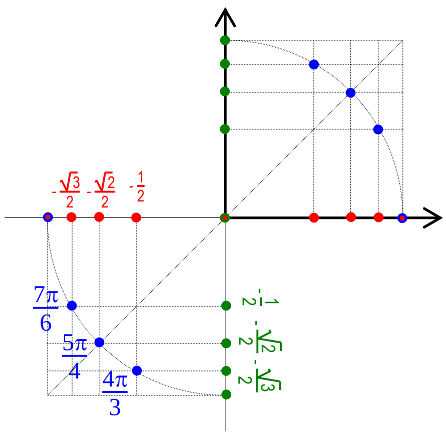
Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, on en déduit les valeurs exactes $\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$.



Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, on en déduit les valeurs exactes $\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}$.

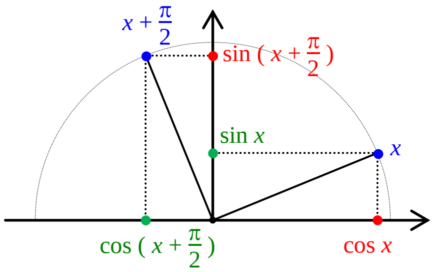


Par symétrie par rapport à l'origine, on en déduit les valeurs exactes $\begin{cases} \cos(x + \pi) = -\cos x \\ \sin(x + \pi) = -\sin x \end{cases}$.



Plus rares (et sans utilité pour les valeurs usuelles...) mais nécessaires pour passer d'un cosinus à un sinus

ou inversement : $\begin{cases} \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x \\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x\,. \end{cases}$



Méthode :

Les angles non usuels vous seront donnés sous la forme $\dfrac{a\pi}{b}$.

Le principe est de :

- encadrer $\dfrac{a\pi}{b}$ entre $n\pi$ et $(n+1)\pi$, deux multiples consécutifs de π,
- en déduire l'écriture de $\dfrac{a\pi}{b}$ sous la forme $\left[\begin{array}{l} \textit{valeur usuelle} + 2k\pi \\ \text{ou } \textit{valeur usuelle} + \pi + 2k\pi\,, \end{array}\right.$
- appliquer $\left[\begin{array}{l} \cos(x+2k\pi) = \cos x \\ \text{ou } \sin(x+2k\pi) = \sin x\,. \end{array}\right.$
- utiliser les cosinus et sinus des valeurs usuelles et les formules.

---

1. Calculer les valeurs exactes de :

a) $\cos 87\pi$.

b) $\sin 200\pi$.

c) $\cos\dfrac{9\pi}{2}$.

d) $\sin\dfrac{19\pi}{2}$.

e) $\cos\dfrac{25\pi}{3}$.

f) $\sin\left(-\dfrac{17\pi}{3}\right)$

g) $\cos\dfrac{43\pi}{4}$

h) $\sin\left(\dfrac{43\pi}{6}\right)$.

i) $\cos\left(-\dfrac{26\pi}{3}\right)$.

---

2. On sait que la valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{12}$ est $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

a) Calculer les valeurs exactes de $\sin\dfrac{25\pi}{12}$; $\sin\dfrac{13\pi}{12}$; $\sin\dfrac{23\pi}{12}$; $\sin\dfrac{11\pi}{12}$ et $\cos\dfrac{7\pi}{12}$.

b) Justifier le signe de $\cos\dfrac{\pi}{12}$, puis en déduire sa valeur exacte.

c) Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(-\dfrac{71\pi}{12}\right)$ et $\cos\dfrac{61\pi}{12}$.

---

3. On sait que la valeur exacte de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ est $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

a) Calculer la valeur exacte de $\cos\dfrac{7\pi}{5}$, $\cos\dfrac{8\pi}{5}$, $\cos\dfrac{3\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{9\pi}{10}$.

b) Justifier le signe de $\sin\dfrac{2\pi}{5}$, puis en déduire sa valeur exacte.

c) Calculer les valeurs exactes de $\sin\dfrac{57\pi}{5}$ et $\sin\left(-\dfrac{87\pi}{5}\right)$.

---

4. On donne un réel quelconque x .

Écrire sous une forme simplifiée les expressions suivantes :

a) $\cos(\pi + x) + \cos(\pi - x)$.

b) $\sin(\pi + x) + \sin(\pi - x)$.

c) $\cos(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

d) $\sin(\pi - x) - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

e) $\sin(x + 3\pi) + \sin(x + 4\pi) + \sin(x + 5\pi) + \sin(x + 6\pi)$.

f) $\cos(x + 3\pi) - \cos(x + 4\pi) + \cos(x + 5\pi) - \cos(x + 6\pi)$.

g) $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x)$ lorsque $x = \frac{\pi}{4}$:

h) Même question que *g)* avec $x = \frac{\pi}{3}$.

i) Même question que *g)* avec $x = \frac{\pi}{6}$.

---

5. Cet exercice est une initiation à la fonction *tangente* , mais seules les formules sur le cosinus et le sinus sont nécessaires.

Pour tout réel x qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, on définit $\tan : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$.

Exprimer les expressions suivantes en fonction de $\tan x$:

a) $\tan(-x)$.

b) $\tan(x + \pi)$.

c) $\tan(\pi - x)$.

d) $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
