Savoir DÉMONTRER AVEC LES VECTEURS EN GÉOMÉTRIE PLANE NON REPÉRÉE

Les exemples du cours sont marqués d'un ©.

© **1.** $EFGH$ et $GHIJ$ sont des parallélogrammes.

Démontrer que $EFJI$ est un parallélogramme.

---

2. On donne un carré $EFGH$ et un point M symétrique de E par rapport à F.

Démontrer que $FMGH$ est un parallélogramme.

---

3. Soit un parallélogramme $ABCD$.
On pose les points M symétrique de D par rapport à A et N symétrique de B par rapport à C.

Démontrer que $AMCN$ est un parallélogramme.

© **4.** RST est un triangle isocèle en R.
On définit le point A tel que $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RA}$.

Démontrer que $RSAT$ est un losange.

---

5. $EFGH$ est un losange de centre Ω.

On définit les points M et N tels que $\overrightarrow{\Omega M} = 2\overrightarrow{\Omega E}$ et $\overrightarrow{\Omega N} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega F}$.

Soit le point O tel que $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{\Omega N}$.

Démontrer que ΩMON est un rectangle.

© **6.** $ABCD$ est un parallélogramme.
On place un point M quelconque sur le plan.

Démontrer que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

---

7. $ABCD$ est un parallélogramme de centre O.
On place un point M quelconque sur le plan.

Démontrer que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

© **8.** EFG est un triangle rectangle en F.
On pose M et N tels que $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FN}$.

Démontrer que G est milieu de $[MN]$.

---

9. Soit un triangle ABC rectangle en B.
On définit les points R et S tels que $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

Démontrer que A est le milieu de $[RS]$.

© **10.** Étant donné un triangle MNO , on définit le point K par $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})$.
Démontrer que K est milieu de $[MN]$.

© **11.** Étant donné un triangle ABC , on pose I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.
Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

C'est la version vectorielle du théorème de la droite des milieux.
Du fait que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ *, on en déduit que* $(IJ) // (BC)$ *et* $IJ = BC$.

---

12. Dans le triangle RST , on pose S' et T' tels que $\overrightarrow{RS'} = k\,\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT'} = k\,\overrightarrow{RT}$.
Démontrer que $\overrightarrow{S'T'} = k\,\overrightarrow{ST}$.
C'est la version vectorielle de la réciproque du théorème de Thalès.

$\overrightarrow{RS'} = k\,\overrightarrow{RS}$ *et* $\overrightarrow{RT'} = k\,\overrightarrow{RT}$ *signifient que* $\begin{cases} \textit{les points } R, S \textit{ et } S' \textit{ sont alignés} \\ \textit{les points } R, T \textit{ et } T' \textit{ sont alignés dans le même ordre} \\ \dfrac{RS'}{RS} = \dfrac{RT'}{RT} \end{cases}$

et du fait que $\overrightarrow{S'T'} = k\,\overrightarrow{ST}$ *, on déduit que* $(S'T') // (ST)$.

© **13.** Dans le triangle RST , on pose A et B tels que $\overrightarrow{RA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{RB} = 3\,\overrightarrow{RS}$.
Démontrer que $(BT) // (SA)$.

---

14. Dans le rectangle $FGHI$, on pose K milieu de $[FI]$, L milieu de $[KI]$ et J tel que $\overrightarrow{IJ} = 4\overrightarrow{IH}$.
Démontrer que $(FJ) // (LH)$.

---

15. Dans le rectangle $ABCD$, on pose M milieu de $[AD]$ et N tel que $\overrightarrow{CN} = 3\overrightarrow{CD}$.
Démontrer que $(AN) // (BM)$.

© **16.** $ABCD$ est un parallélogramme.
Soit I et J tels que $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\,\overrightarrow{AD}$.
Démontrer que I , C et J sont alignés.

© **17.** Dans le parallélogramme $ABCD$, on pose I le milieu de $[AB]$.
Soit E le point tel que $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$.
Démontrer que A , E et C sont alignés.

---

18. Construire un triangle ABC et les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que les milieux des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[DE]$ sont alignés.
