1. ***a)*** 1ère méthode : élimination de z par substitution

$$\begin{cases} -2x+3y+4z=-3 \\ 7x-5y+3z=-18 \\ 3x-2y+z=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y+4(-7-3x+2y)=-3 \\ 7x-5y+3(-7-3x+2y)=-18 \\ z=-7-3x+2y \end{cases}$$

Je repère que z est " presque tout seul " dans (L_3) : je l'exprime en fonction de x et y.

Je remplace les z de (L_1) et (L_2) par $-7-3x+2y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y-28-12x+8y=-3 \\ 7x-5y-21-9x+6y=-18 \\ z=-7-3x+2y \end{cases}$$

→ Je n'ai plus que des x et des y dans les deux premières équations : je sais faire ! Je commence par développer, et je "gèle" la troisième équation.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14x+11y=25 \\ -2x+y=3 \\ z=-7-3x+2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14x+11(3+2x)=25 \\ y=3+2x \\ z=-7-3x+2y \end{cases}$$

→ Je repère que y est presque tout seul dans (L_2) : je l'exprime en fonction de x et je remplace le y de (L_1) par $3+2x$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x=-8 \\ y=3+2x \\ z=-7-3x+2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3+2\times(-1)=1 \\ z=-7-3\times(-1)+2\times1=-2 \end{cases}$$

→ Le système en cascade me donne successivement x, puis y, puis z.

Donc, la solution est le triplet $(-1\,;1\,;-2)$.

→ Ou encore : Donc : $\mathscr{S}=\{(-1\,;1\,;-2)\}$.

Remarque : Cette méthode ne se prête pas à l'élimination de x ou de y (apparition de fractions fort désagréables...).

2ème méthode : élimination de z par combinaisons linéaires

$4z$ dans (L_1) et un seul dans (L_3) : en faisant $(L_1)-4\times(L_3)$, les z vont disparaître de (L_1).
De même, en faisant $(L_2)-3\times(L_3)$, les z vont disparaître de (L_2).

$$\begin{cases} -2x+3y+4z=-3 \\ 7x-5y+3z=-18 \\ 3x-2y+z=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2x+3y+4z)-4\times(3x-2y+z)=-3-4\times(-7) \\ (7x-5y+3z)-3\times(3x-2y+z)=-18-3\times(-7) \\ 3x-2y+z=-7 \end{cases}$$

Et je "gèle" la troisième équation.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14x+11y=25 \\ -2x+y=3 \\ 3x-2y+z=-7 \end{cases}$$

→ On se retrouve dans la même situation qu'avec la 1ère méthode.

...

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ 3\times(-1)-2\times1+z=-7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=-7+3+2=-2 \end{cases}$$

Donc : $\mathscr{S}=\{(-1\,;1\,;-2)\}$.

Remarque : Cette méthode fonctionne pour éliminer n'importe quelle inconnue, comme on va le voir.

3ème méthode : élimination de x par combinaisons linéaires

$-2x$ dans (L_1) et $7x$ (L_2) : en faisant $2\times(L_2)+7\times(L_1)$, les x vont disparaître de (L_2).
De même, en faisant $2\times(L_3)+3\times(L_1)$, les x vont disparaître de (L_3).

$$\begin{cases} -2x+3y+4z=-3 \\ 7x-5y+3z=-18 \\ 3x-2y+z=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y+4z=-3 \\ 2\times(7x-5y+3z)+7\times(-2x+3y+4z)=2\times(-18)+7\times(-3) \\ 2\times(3x-2y+z)+3\times(-2x+3y+4z)=2\times(-7)+3\times(-3) \end{cases}$$

Et je "gèle" la première équation.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y+4z=-3 \\ 14x-10y+6z-14x+21y+28z=-57 \\ 6x-4y+2z-6x+9y+12z=-23 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y+4z=-3 \\ 11y+34z=-57 \\ 5y+14z=-23 \end{cases}$$

→ Je n'ai plus que des y et des z dans les deux dernières équations : je sais faire ! Seule la méthode des combinaisons linéaires est valide.

...

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3\times1+4\times(-2)=-3 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x = -3 - 3 + 8 = 2 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Donc : $\mathscr{S} = \{ (-1 ; 1 ; -2) \}$.

Remarque : Les calculs sont moins agréables qu'avec la 1ère méthode, mais c'est la seule valide lorsqu'il n'y a aucune des neuf lettres " presque seule ".

Remarque : On aurait pu aussi faire disparaître les x de (L_1) et (L_2) en les remplaçant par $3\times(L_1) + 2\times(L_3)$ et $3\times(L_2) - 7\times(L_3)$.
Et en gelant (L_3).

De même, les x peuvent disparaître de (L_1) et (L_3) en les remplaçant par $7\times(L_1) + 2\times(L_2)$ et $7\times(L_3) - 3\times(L_2)$.
Et en gelant (L_3).

Remarque : Et tout ça fonctionne très bien si on veut faire disparaître les y !

b) $\mathscr{S} = \{ (1 ; 2 ; 3) \}$.

Remarque : La méthode par substitution fonctionne très bien.
On peut aussi remplacer (L_2) par $(L_2) - (L_1)$ pour éliminer x .
Mais il y a bien mieux en remplaçant (L_3) par $(L_3) - (L_1)$: les x et les z disparaissent, on trouve directement y !

c) $\mathscr{S} = \{ (4 ; -2 ; -1) \}$.

Remarque : Ne pas s'inquiéter du changement de lettres. Par convention, la valeur de a occupe la première place du triplet solution, etc.

d) $\mathscr{S} = \{ (1 ; -1 ; -1) \}$.

Remarque : Pas de souci avec le changement de place des valeurs constantes.

e) $\mathscr{S} = \{ (\frac{91}{27} ; -\frac{7}{3} ; \frac{59}{27}) \}$.

Remarque : Dès l'obtention de la première valeur non entière, on cherche la solution à la calculatrice ! Et on est rassuré…
De telles valeurs sont assez rares, mais ça peut arriver, notamment avec les systèmes issus de situations (vraiment) concrètes.

Remarque : Vous pouvez utiliser votre calculatrice pour confirmer votre solution après avoir fini tous vos calculs.
Mais il est bien plus malin de connaître la solution **avant les calculs** : cela permet de déceler tout de suite une erreur et évite de perdre du temps.

f) $\mathscr{S} = \{ (0 ; -3 ; 3) \}$.

Remarque : Dès l'obtention de la première valeur non entière, on cherche la solution à la calculatrice ! Et on est rassuré…
De telles valeurs sont assez rares, mais ça peut arriver, notamment avec les systèmes issus de situations (vraiment) concrètes.

g) $\mathscr{S} = \{ (5 ; 0 ; \frac{1}{2}) \}$.

Remarque : Ce qui nous empoisonne ici, ce sont les fractions.
On peut avoir la tentation d'additionner (L_2) et (L_3) pour éliminer les z .
Mais il est plus raisonnable de multiplier (L_1) par 4 et (L_2) par 3 …

---

2. **a)**

$$\begin{cases} 2a + b + 1 = 0 \\ a = c + 1 \\ 2b - 3a + 5c = 5 \\ 2a = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + 1 = 0 \\ a = 2a + 1 \\ 2b - 3a + 5c = 5 \\ 2a = c \end{cases}$$

→ Je "gèle" la 3ème équation, qui semble un peu plus compliquée que les autres.
D'après (L_4) , je remplace c par $2a$ dans (L_2) .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\times(-1) + b + 1 = 0 \\ a = -1 \\ 2b - 3a + 5c = 5 \\ c = 2\times(-1) = -2 \end{cases}$$

→ Je remplace a par -1 dans (L_1) et dans (L_4) , ce qui me donne directement c et b .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - 1 = 1 \\ a = -1 \\ 2b - 3a + 5c = 5 \\ c = -2 \end{cases}$$

C'est un système impossible car $2\times1 - 3\times(-1) + 5\times(-2) = 2 + 3 - 10 = -5 \neq 5$.

→ Je teste les valeurs $a = -1$, $b = 1$ et $c = -2$ dans (L_3) .
Comme elles ne la vérifient pas, c'est tout le système qui est impossible.

Donc, il n'y a pas de solution.

→ Ou encore : Donc : $\mathscr{S} = \varnothing$.

Remarque : La calculatrice doit vous répondre : `false` .

b) $\begin{cases} x-z=1 \\ 4x^2-2=2z+6 \\ y+z=2 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=1 \\ 4x^2-2=2z+6 \\ x+z=2 \\ x=y \end{cases}$ → Je "gèle" la 2ème équation.
Et d'après (L_4), je remplace y par x dans (L_3).

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-z)+(x+z)=1+2 \\ 4x^2-2=2z+6 \\ x+z=2 \\ x=y \end{cases}$ → Je remplace (L_1) par $(L_1)+(L_3)$ pour éliminer z.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ 4x^2-2=2z+6 \\ \frac{3}{2}+z=2 \\ \frac{3}{2}=y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ 4x^2-2=2z+6 \\ z=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$

Je teste les valeurs $x=\frac{3}{2}$ et $z=\frac{1}{2}$ dans (L_2).

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ z=\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$ car $\begin{cases} 4\times(\frac{3}{2})^2-2=4\times\frac{9}{4}-2=9-2=7 \\ 2\times\frac{1}{2}+6=1+6=7 \end{cases}$

Comme elles la vérifient, l'équation (L_2) est inutile : le système reste équivalent si on ne l'écrit pas.

Donc : $\mathscr{S}=\{(\frac{3}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{2})\}$.

Remarque : Il y avait plein de manières de faire pour ce sympathique système.

On pouvait par exemple exprimer y et z en fonction de x et les remplacer simultanément dans (L_3) : $\begin{cases} z=x-1 \\ 4x^2-2=2z+6 \\ x+x-1=2 \\ x=y \end{cases}$,

ce qui donne d'un coup z et y : $\begin{cases} z=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2} \\ 4x^2-2=2z+6 \\ x=\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}=y \end{cases}$ etc...

c) $\mathscr{S}=\{(3;-3;3)\}$.

Remarque : On peut "geler" tout aussi bien (L_2) que (L_3).

d) $\mathscr{S}=\varnothing$.

---

3. Posons t le poids de Me O'Toole, b celui du bébé et c celui du chien.

$\Rightarrow t+c+b=170$

Madame O'Toole pèse 100 livres de plus que le chien et le bébé réunis $\Rightarrow t=c+b+100$
Le chien pèse 60% de moins que le bébé $\Rightarrow c=(1-60\ \%)\,b \Rightarrow c=0{,}4\,b$

On en déduit le système $\begin{cases} t+c+b=170 \\ t=c+b+100 \\ c=0{,}4\,b \end{cases}$.

Après résolution (la substitution marche très bien), on trouve $\begin{cases} t=135 \\ b=25 \\ c=10 \end{cases}$.

La conclusion doit être concrète :
Donc, Madame O'Toole pèse 135 livres, le bébé pèse 25 livres et le chien pèse 10 livres.

Ou même plus simplement pour répondre précisément à la question :
Donc, le chérubin pèse 25 livres.

4. Ω est le centre du cercle inscrit, donc il est le point de concours des trois bissectrices de $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

On en déduit en particulier que $\begin{cases} \widehat{FA\Omega} = \widehat{\Omega AE} \\ \Omega F = \Omega E \\ AF\Omega \text{ rectangle en } F \text{ et } AE\Omega \text{ rectangle en } E. \end{cases}$

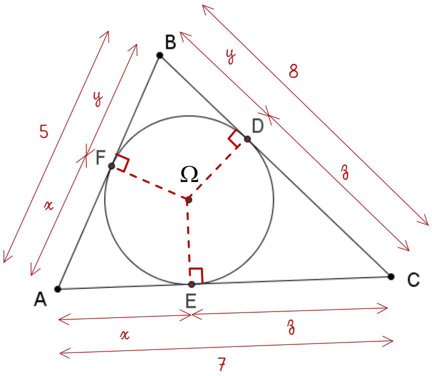
Donc, $AF\Omega$ et $AE\Omega$ sont deux triangles rectangles ayant une longueur et un angle aigu communs : ils sont superposables.
Et donc : $AF = AE$.

On démontre de même que $\begin{cases} BF = BD \\ CE = CD. \end{cases}$ → Retenez bien qu'on vous autorise à ne pas refaire plusieurs fois le même raisonnement.

Posons x les longueurs AF et AE, y les longueurs BF et BD et z les longueurs CE et CD.

On en déduit le système :

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 7 \\ y + z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots$$



Après résolution, on trouve $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}$.

Donc : $\begin{cases} AF = AE = 2 \\ BF = BD = 3 \\ CE = CD = 5 \end{cases}$.