Correction de SOS MATH 1ère S – ÉTUDES DE FONCTIONS - Fiche 3

1. $1^{\text{ère}}$ méthode

Soit a et b dans $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ tels que $a \leqslant b$.

$-\frac{1}{2} < a \leqslant b$

$\Rightarrow -1 < 2a \leqslant 2b$

$\Rightarrow 0 < 2a+1 \leqslant 2b+1$

Les deux nombres à inverser carrée doivent être strictement positifs.

$\Rightarrow \frac{1}{2a+1} \geqslant \frac{1}{2b+1}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

Donc f inverse l'ordre sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, → Car on est passé de $a \leqslant b$ à $f(a) \geqslant f(b)$.

donc f décroissante sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

$2^{\text{ème}}$ méthode

En posant $u(x) = 2x+1$, on a $f = \frac{1}{u}$.

$\begin{cases} u \text{ est croissante sur } \mathbb{R}\text{, donc sur } \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[\\ x > -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x+1>0\text{, donc } u \text{ ne s'annule pas sur } \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[\end{cases}$

donc $\frac{1}{u}$ décroissante sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

---

2. $1^{\text{ère}}$ méthode

Soit a et b dans $[\,-5\,;+\infty\,[$ tels que $a \leqslant b$.

$-5 \leqslant a \leqslant b$

Les deux nombres à mettre sous racine carrée doivent être positifs.

$\Rightarrow 0 \leqslant a+5 \leqslant b+5$

$\Rightarrow \sqrt{a+5} \leqslant \sqrt{b+5}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$

Donc g conserve l'ordre sur $]\,-5\,;+\infty\,[$, → Car on est passé de $a \leqslant b$ à $f(a) \leqslant f(b)$.

donc g croissante sur $]\,-5\,;+\infty\,[$.

$2^{\text{ème}}$ méthode

En posant $u(x) = x+5$, on a $g = \sqrt{u}$.

$\begin{cases} u \text{ croissante sur } \mathbb{R}\text{, donc sur } [\,-5\,;+\infty\,[\\ x \geqslant -5 \Rightarrow x+5 \geqslant 0\text{, donc } u \text{ positive sur } [\,-5\,;+\infty\,[\end{cases}$

donc $\sqrt{u}$ croissante sur $[\,-5\,;+\infty\,[$.

---

3. $1^{\text{ère}}$ méthode

Soit a et b dans $\mathbb{R}+$ tels que $a \leqslant b$.

Les deux nombres à mettre au carré doivent être positifs pour utiliser la croissance de la fonction carrée.

$0 \leqslant a \leqslant b$

$\Rightarrow 0 \leqslant a^2 \leqslant b^2$ car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}+$

$\Rightarrow 1 \leqslant a^2+1 \leqslant b^2+1$ → On aurait pu se contenter de $1 \leqslant \ldots$

$\Rightarrow 0 \leqslant a^2+1 \leqslant b^2+1$ → Mais c'est plus clair avec $0 \leqslant \ldots$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+1} \leqslant \sqrt{b^2+1}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$

Donc h conserve l'ordre sur $\mathbb{R}+$,
donc h croissante sur $\mathbb{R}+$.

$2^{\text{ème}}$ méthode

En posant $u(x) = x^2$, on a $h = \sqrt{u+1}$.

u est croissante sur $\mathbb{R}+$,

donc $u+1$ croissante sur $\mathbb{R}+$.

De plus, x^2 toujours positif, donc $u+1$ positive sur $\mathbb{R}+$.

On en déduit que $\sqrt{u+1}$ croissante sur $\mathbb{R}+$.

4. 1ère méthode

Soit a et b dans $]1\,;+\infty[$ tels que $a \leqslant b$.

$1 < a \leqslant b$

$\Rightarrow 1 < a^2 \leqslant b^2$ car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}+$

$\Rightarrow 0 < a^2 - 1 \leqslant b^2 - 1$ → On aurait pu se contenter de $1 < \dots$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a^2-1} \geqslant \dfrac{1}{b^2-1}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$

$\Rightarrow \dfrac{-2}{a^2-1} \leqslant \dfrac{-2}{b^2-1}$ car -2 négatif

Donc C conserve l'ordre sur $]1\,;+\infty[$,
donc C croissante sur $]1\,;+\infty[$.

2ème méthode

En posant $u(x) = x^2$, on a $C = \dfrac{-2}{u-1}$.

u est croissante sur $\mathbb{R}+$ donc sur $]1\,;+\infty[$.

De plus, $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0$, donc $u - 1$ strictement positive sur $]1\,;+\infty[$.

On en déduit que $\dfrac{1}{u-1}$ décroissante sur $]1\,;+\infty[$

et donc que $\dfrac{-2}{u-1}$ croissante sur $]1\,;+\infty[$, car -2 négatif.

---

5. 1ère méthode

Soit a et b dans $]-\infty\,;0[$ tels que $a \leqslant b$.

$a \leqslant b < 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \geqslant b^2 & \text{car la fonction carré est décroissante sur } \mathbb{R}- \text{ et donc sur }]-\infty\,;0[\\ \dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b} & \text{car la fonction inverse est décroissante sur }]-\infty\,;0[\end{cases}$

$\Rightarrow a^2 + \dfrac{1}{a} \geqslant b^2 + \dfrac{1}{b}$ → Ici, la somme des deux plus grands est supérieure à la somme des deux plus petits.

Donc φ inverse l'ordre sur $]-\infty\,;0[$,
donc φ décroissante sur $]-\infty\,;0[$.

2ème méthode

En posant $u(x) = x^2$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$, on a $\varphi = u + v$.

$\begin{cases} u \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}- \text{ donc sur }]-\infty\,;0[\\ v \text{ est décroissante sur }]-\infty\,;0[\end{cases}$

donc $u + v$ décroissante sur $]-\infty\,;0[$.

---

6. 1ère méthode

Soit a et b dans $]1\,;2[$ tels que $a \leqslant b$.

$1 < a \leqslant b < 2$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 < a-1 \leqslant b-1 < 1 \\ -1 < a-2 \leqslant b-2 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a-1} \geqslant \dfrac{1}{b-1} & \text{car la fonction inverse est décroissante sur }]0\,;+\infty[\\ \dfrac{1}{a-2} \geqslant \dfrac{1}{b-2} & \text{car la fonction inverse est décroissante sur }]-\infty\,;0[\end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a-1} + \dfrac{1}{a-2} \geqslant \dfrac{1}{b-1} + \dfrac{1}{b-2}$ → Ici, la somme des deux plus grands est supérieure à la somme des deux plus petits.

Donc F inverse l'ordre sur $]1\,;2[$,
donc F décroissante sur $]1\,;2[$.

2ème méthode

En posant $u(x) = x - 1$ et $v(x) = x - 2$, on a $F = \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v}$.

$\begin{cases} u \text{ croissante et ne s'annule pas sur }]1\,;2[\\ v \text{ croissante et ne s'annule pas sur }]1\,;2[\end{cases}$

donc $\begin{cases} \dfrac{1}{u} \text{ décroissante sur }]1\,;2[\\ \dfrac{1}{v} \text{ décroissante sur }]1\,;2[\end{cases}$

donc $\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v}$ décroissante sur $]1\,;2[$.

---

7. ***a)*** Soit a et b dans $]\,0\,;+\infty\,[$ tels que $a \leqslant b$.

Pour inverser...

$0 < a \leqslant b$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b} > 0$ car la fonction inverse est décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a}+1 \geqslant \dfrac{1}{b}+1 > 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a}+1 \geqslant \dfrac{1}{b}+1 \geqslant 0$

Pour utiliser la croissance de la fonction carré sur ℝ+ .

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{a}+1\right)^2 \geqslant \left(\dfrac{1}{b}+1\right)^2$ car la fonction carré est croissante sur ℝ+

Pas de 2ème méthode à cause du carré...

Donc G inverse l'ordre sur $]\,0\,;+\infty\,[$,
donc G décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

b) Soit a et b dans $[\,-1\,;0\,[$ tels que $a \leqslant b$.

Pour inverser...

$-1 \leqslant a \leqslant b < 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{-1} \geqslant \dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$\Rightarrow -1+1 \geqslant \dfrac{1}{a}+1 \geqslant \dfrac{1}{b}+1$

Pour utiliser la décroissance de la fonction carré sur ℝ- .

$\Rightarrow 0 \geqslant \dfrac{1}{a}+1 \geqslant \dfrac{1}{b}+1$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{a}+1\right)^2 \leqslant \left(\dfrac{1}{b}+1\right)^2$ car la fonction carré est décroissante sur ℝ–

Donc G conserve l'ordre sur $[\,-1\,;0\,[$,
donc G croissante sur $[\,-1\,;0\,[$.

c) Soit a et b dans $]\,-\infty\,;-1\,]$ tels que $a \leqslant b$.

$a \leqslant b \leqslant -1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b} \geqslant \dfrac{1}{-1}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a}+1 \geqslant \dfrac{1}{b}+1 \geqslant -1+1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a}+1 \geqslant \dfrac{1}{b}+1 \geqslant 0$

Pour utiliser la croissance de la fonction carré sur ℝ+ .

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{a}+1\right)^2 \geqslant \left(\dfrac{1}{b}+1\right)^2$ car la fonction carré est croissante sur ℝ+

Donc G inverse l'ordre sur $]\,-\infty\,;-1\,]$,
donc G décroissante sur $]\,-\infty\,;-1\,]$.

d)

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Variations de G		↘	0	↗	‖	↘	

$G(-1) = \left(\dfrac{1}{-1}+1\right)^2 = 0$

8. ***a)*** Le discriminant de x^2-2x-3 est $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times(-3) = 16 > 0$

donc il a deux racines qui sont $\dfrac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times1} = 3$ et $\dfrac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times1} = -1$.

x^2-2x-3 est du signe de son coefficient dominant 1 , donc positif, à l'extérieur des racines.

Donc, le domaine de définition de H est $]\,-\infty\,;-1\,] \cup [\,3\,;+\infty\,[$.

b) En posant $u(x) = x^2-2x-3$, on a $H = \sqrt{u}$.

$u(x)$ a un coefficient dominant positif donc possède un minimum, atteint en $-\dfrac{-2}{2\times1} = 1$.

Donc u croissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$, et donc sur $[\,3\,;+\infty\,[$.

De plus, d'après la question *a)* , u est positive sur $[\,3\,;+\infty\,[$.

On en déduit que $\sqrt{u}$ est croissante sur $[\,3\,;+\infty\,[$.

1ère méthode impossible...
En effet, par exemple sur $[\,3\,;+\infty\,[$:
de $a \leqslant b$, on peut déduire $a^2 \leqslant b^2$,
ainsi que $-2a \geqslant -2b$.
Mais on ne peut rien dire de a^2-2a et b^2-2b ...

c) De même, on a u décroissante sur $]\,-\infty\,;1\,]$, et donc sur $]\,-\infty\,;-1\,]$.

Et, d'après la question *a)* , u est positive sur $]\,-\infty\,;-1\,]$.

On en déduit que $\sqrt{u}$ est décroissante sur $]\,-\infty\,;-1\,]$.

d)

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Variations de H		$\searrow$	0	non définie	0	$\nearrow$