Correction de SOS MATH 1ère S – ÉTUDES DE FONCTIONS - Fiche 4

1. ***a)***

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2(2+h)-3} - \frac{1}{2\times 2-3}}{h}$$

→ Je remplace x par $2+h$ puis par 2.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+2h} - 1}{h}$$

→ Je calcule.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+2h} - \frac{1+2h}{1+2h}}{h}$$

→ Je réduis au même dénominateur $1+2h$ (on peut aller plus vite avec une machine qui gère le calcul littéral).

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-2h}{1+2h}}{h}$$

→ J'ajoute en faisant attention au signe $-$ qui porte sur 1 et sur $2h$.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\cancel{h}}{1+2h} \times \frac{1}{\cancel{h}}$$

→ Diviser par h c'est multiplier par $\frac{1}{h}$, puis je simplifie par h (montrez la simplification !).

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2}{1+2h}$$

→ C'est fini, on peut faire tendre h vers 0.

$$= -2$$

→ h tend vers 0 $\Rightarrow$ $2h$ tend vers 0 $\Rightarrow$ $1+2h$ tend vers 1 $\Rightarrow$ $\frac{-2}{1+2h}$ tend vers -2.

b)

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2(0+h)-3} - \frac{1}{2\times 0-3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2h-3} + \frac{1}{3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{3(2h-3)} + \frac{2h-3}{3(2h-3)}}{h}$$

→ Dénominateur commun peu agréable…

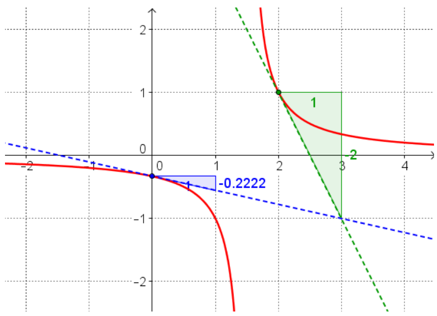
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h}{6h-9}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cancel{h}}{6h-9} \times \frac{1}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{6h-9}$$

$$= -\frac{2}{9}$$

Si j'ai le temps ou si on me donne un graphique, je vérifie la cohérence de mes résultats :



En particulier, j'évite de donner un nombre dérivé positif pour une tangente qui descend…

---

2. ***a)***

$$g'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{g(3+h)-g(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-(3+h)+2-(3^2-3+2)}{h}$$

→ Je remplace x par $3+h$ puis par 3.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9+6h+h^2-3-h+2-8}{h}$$

→ Je développe.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+5h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(h+5)}{\cancel{h}}$$

→ Je factorise h pour le simplifier.

$$= \lim_{h\to 0} (h+5)$$

$$= 5$$

→ h tend vers 0 $\Rightarrow$ $h+5$ tend vers 5

b) $$g'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^2-(-1+h)+2-(\,(-1)^2-(-1)+2\,)}{h}$$

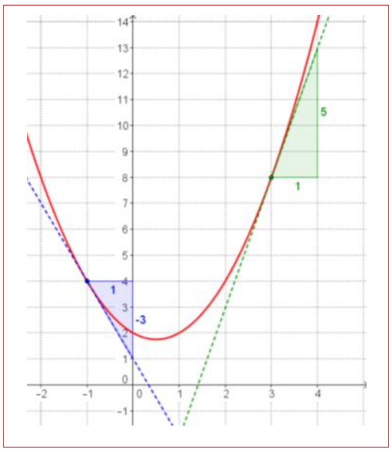
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-2h+h^2+1-h+2-4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2-3h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\,(h-3)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} (\,h-3\,)$$

$$= -3$$



3. **a)** $$F\,'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{F(4+h)-F(4)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(4+h)+5}-\sqrt{4+5}}{h}$$ → Je remplace x par $4+h$ puis par 4 .

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+h}-3}{h}$$ → Je calcule.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{9+h}-3)(\sqrt{9+h}+3)}{h(\sqrt{9+h}+3)}$$ → Je multiplie $\sqrt{9+h}-3$ par son conjugué $\sqrt{9+h}+3$ (ainsi que le dénominateur).

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9+h-9}{h(\sqrt{9+h}+3)}$$ → Le produit de la forme $(a-b)(a+b)$ devient a^2-b^2 et les racines disparaissent...

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{9+h}+3)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{9+h}+3}$$

$$= \frac{1}{6}$$ → h tend vers 0 $\Rightarrow$ $9+h$ tend vers 9 $\Rightarrow$ $\sqrt{9+h}$ tend vers 3 $\Rightarrow$ $\sqrt{9+h}+3$ tend vers 6 .

b) $$F\,'(-4) = \lim_{h\to 0} F(-4+h)-F(-4)/\,h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(-4+h)+5}-\sqrt{-4+5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$$

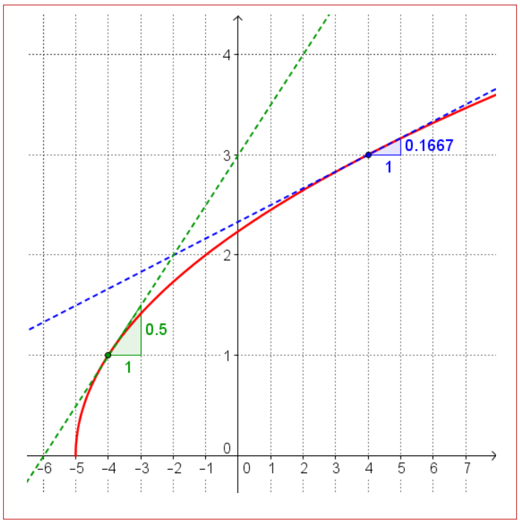
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{1+h}+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+h}+1}$$

$$= \frac{1}{2}$$



4. ***a)***

$$G'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{G(1+h)-G(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{3(1+h)+1}{1+h-5} - \dfrac{3\times 1+1}{1-5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{4+3h}{h-4}+1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{4+3h}{h-4}+\dfrac{h-4}{h-4}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{4h}{h-4}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4\cancel{h}}{h-4} \times \frac{1}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4}{h-4}$$

$$= -1$$

b)

$$G'(-3) = \lim_{h\to 0} \frac{G(-3+h)-G(-3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{3(-3+h)+1}{-3+h-5} - \dfrac{3\times(-3)+1}{-3-5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{3h-8}{h-8}-1}{h}$$

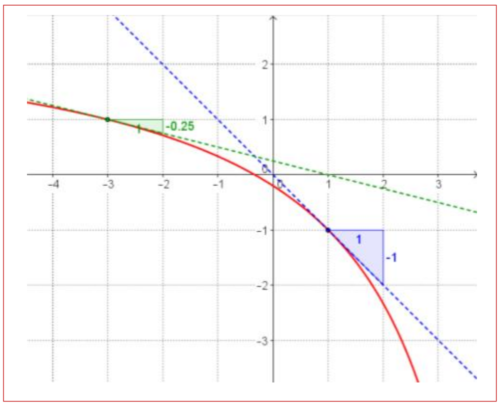
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{3h-8}{h-8}-\dfrac{h-8}{h-8}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2h}{h-8}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cancel{h}}{h-8} \times \frac{1}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{h-8}$$

$$= -\frac{1}{4}$$



5.

$$\varphi'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(1+h)-\varphi(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+3\sqrt{1+h}-(1+3\sqrt{1})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3\sqrt{1+h}-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(3\sqrt{1+h}-3)(3\sqrt{1+h}+3)}{h(3\sqrt{1+h}+3)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9(1+h)-9}{h(3\sqrt{1+h}+3)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9\cancel{h}}{\cancel{h}(3\sqrt{1+h}+3)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9}{3\sqrt{1+h}+3}$$

$$= \frac{9}{6}$$

$\to h$ tend vers $0 \Rightarrow 1+h$ tend vers $1 \Rightarrow \sqrt{1+h}$ tend vers $1 \Rightarrow 3\sqrt{1+h}$ tend vers $3 \Rightarrow 3\sqrt{1+h}+3$ tend vers 6

$$= \frac{3}{2}$$