Correction de SOS MATH 1ère S – ÉTUDES DE FONCTIONS - Fiche 6

1. ***a)*** f fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4\times3x^2 - 5\times2x + 7$
$= 12x^2 - 10x + 7$.

b) g de la forme $u + v$ avec $\begin{cases} u : x \mapsto 2x^2 \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } u'(x) = 4x \\ v : x \mapsto \sqrt{x} \text{ dérivable sur } \mathbb{R}+* \text{ et } v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} , \end{cases}$

donc g est dérivable sur $\mathbb{R}+*$ et $g' = u' + v'$. → *Le domaine de dérivabilité est l'intersection des deux (ici le plus petit des deux).*

Donc $g'(x) = 4x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{8x\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}$. → *La factorisation demandée consiste à réduire au même dénominateur.*

c) h fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 10x^9 - 1$.

d) F de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u : x \mapsto 5x - 3$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 5$,

u s'annule en $\dfrac{3}{5}$, donc F est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{ \dfrac{3}{5} \}$ et $F' = \dfrac{-u'}{u^2}$. → *Attention à ne pas oublier les valeurs interdites…*

Donc $F'(x) = \dfrac{-5}{(5x-3)^2}$.

e) G de la forme uv avec $\begin{cases} u : x \mapsto x^2 + 7x \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } u'(x) = 2x + 7 \\ v : x \mapsto \sqrt{x} \text{ dérivable sur } \mathbb{R}+* \text{ et } v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} , \end{cases}$

Donc G est dérivable sur $\mathbb{R}+*$ et $G' = u'v + uv'$.

Donc $G'(x) = (2x+7)\sqrt{x} + (x^2 + 7x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{(2x+7)\sqrt{x}\times2\sqrt{x} + (x^2+7x)}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{2x(2x+7) + (x^2+7x)}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{5x^2 + 21x}{2\sqrt{x}}$

f) H de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u : x \mapsto x - 1 \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } u'(x) = 1 \\ v : x \mapsto x + 1 \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } v'(x) = 1 . \end{cases}$

v s'annule en -1 , donc H est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{ -1 \}$ et $H' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Donc $H'(x) = \dfrac{1\times(x+1) - (x-1)\times1}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

g) φ de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u : x \mapsto 2x^2 + 9x - 18$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 4x + 9$.

Le discriminant de $u(x)$ est $\Delta = 9^2 - 4\times2\times(-18) = 225 > 0$

donc $u(x)$ s'annule en ses deux racines $\dfrac{-9+\sqrt{225}}{2\times2} = 1{,}5$ et $\dfrac{-9-\sqrt{225}}{2\times2} = -6$.

Donc φ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{ -6 ; 1{,}5 \}$ et $\varphi' = \dfrac{-u'}{u^2}$.

Donc $\varphi'(x) = \dfrac{-(4x+9)}{(2x^2 + 9x - 18)^2}$.

h) ψ de la forme uv avec $\begin{cases} u : x \mapsto 2x \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } u'(x) = 2 \\ v : x \mapsto \sqrt{x} \text{ dérivable sur } \mathbb{R}+* \text{ et } v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} , \end{cases}$

donc ψ est dérivable sur $\mathbb{R}+*$ et $\psi' = u'v + uv'$.

Donc $\psi'(x) = 2\sqrt{x} + \cancel{2}x\dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}$

$= \dfrac{2\sqrt{x}\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}}$

$= \dfrac{3x}{\sqrt{x}}$

$= \dfrac{3\sqrt{x}\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}}$

$= 3\sqrt{x}$

On pouvait simplifier par $\sqrt{x}$ dès la deuxième ligne :

$\psi'(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}}$

$= 2\sqrt{x} + \sqrt{x}$

$= 3\sqrt{x}$

i) f_1 de la forme $5\times\dfrac{1}{u}$ avec $u : x \mapsto x^2+1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$. → Bien gérer le 5 comme une constante multiplicative.

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$: c'est impossible, donc u ne s'annule pas,
donc f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_1' = 5\times\dfrac{-u'}{u^2}$.

Donc $f_1'(x) = 5\,\dfrac{-2x}{x^2+1}$

$= \dfrac{-10x}{x^2+1}$.

j) f_2 fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_2'(x) = \dfrac{1}{100}\times 2x$ → Avez-vous vu que $\dfrac{1}{100}$ est une constante multiplicative ?

$= \dfrac{x}{50}$.

k) χ de la forme uv avec $\begin{cases} u : x \mapsto \dfrac{1}{x}+1 \text{ dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et } u'(x) = \dfrac{-1}{x^2} \\ v : x \mapsto \dfrac{1}{x}+2 \text{ dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et } v'(x) = \dfrac{-1}{x^2}, \end{cases}$

→ + 1 constante additive qui disparaît dans la dérivation.
→ + 2 constante additive qui disparaît dans la dérivation.

donc χ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\chi' = u'v + uv'$.

Donc $\chi'(x) = \dfrac{-1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x}+2\right) + \left(\dfrac{1}{x}+1\right)\dfrac{-1}{x^2}$

$= \dfrac{-1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x}+2+\dfrac{1}{x}+1\right)$ → Je factorise par $\dfrac{-1}{x^2}$.

$= \dfrac{-1}{x^2}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{3x}{x}\right)$ → Je réduis au même dénominateur dans les parenthèses.

$= \dfrac{-2-3x}{x^3}$

l) F_0 de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u : x \mapsto x^2-2x+3 \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } u'(x) = 2x-2 \\ v : x \mapsto 7-x \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } v'(x) = -1. \end{cases}$

v s'annule en 7, donc F_0 est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{7\}$ et $F_0' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Donc $F_0'(x) = \dfrac{(2x-2)(7-x)-(x^2-2x+3)(-1)}{(7-x)^2}$

$= \dfrac{-2x^2+14x+2x-14+x^2-2x+3}{(7-x)^2}$

$= \dfrac{-x^2+14x-11}{(7-x)^2}$

m) j de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u : x \mapsto 2\sqrt{x} \text{ dérivable sur } \mathbb{R}+^* \text{ et } u'(x) = 2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ v : x \mapsto \dfrac{1}{x}+1 \text{ dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et } v'(x) = \dfrac{-1}{x^2}. \end{cases}$

→ 2 est une constante multiplicative pour u.
→ + 1 constante additive qui disparaît dans la dérivation.

$\dfrac{1}{x}+1=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}=-1 \Leftrightarrow -x=1 \Leftrightarrow x=-1$
Donc v s'annule en -1.
Mais cette annulation ne peut se produire car u n'est définie que sur $\mathbb{R}+$, et donc j aussi.
Donc j est dérivable sur $\mathbb{R}+^*$ et $j' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Donc $j'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{x}+1\right) - 2\sqrt{x}\times\dfrac{-1}{x^2}}{\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^2}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{x\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{2\sqrt{x}}{x^2}}{\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^2}$ → Je développe et réduis.

$= \dfrac{\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}+\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2}+\dfrac{2\sqrt{x}}{x^2}}{\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^2}$ → Pour obtenir x^2 comme dénominateur commun, je multiplie $x\sqrt{x}$ par $\sqrt{x}$, et $\sqrt{x}$ par $x\sqrt{x}$.

$= \dfrac{\sqrt{x}\,(3+x)}{x^2\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^2}$

n) C de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u : x \mapsto x^2+x+1 \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } u'(x) = 2x+1 \\ v : x \mapsto x^2-x+1 \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } v'(x) = 2x-1. \end{cases}$
Le discriminant de $v(x)$ est $\Delta = (-1)^2-4\times1\times1 = -3 < 0$
donc $v(x)$ ne s'annule pas.

Donc C est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $C' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Donc $C'(x) = \dfrac{(2x+1)(x^2-x+1)-(x^2+x+1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$= \dfrac{2x^3-2x^2+2x+x^2-x+1-2x^3+x^2-2x^2+x-2x+1}{(x^2-x+1)^2}$

$= \dfrac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}$.

o) δ de la forme $u+v+w$ avec $\begin{cases} u : x \mapsto 5\sqrt{x} \text{ dérivable sur } \mathbb{R}+^* \text{ et } u'(x) = 5\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v : x \mapsto -\dfrac{3}{x} \text{ dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et } v'(x) = -3\times\dfrac{-1}{x^2} \\ w : x \mapsto 7x^2-2x+4 \text{ polynôme dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } w'(x) = 14x-2, \end{cases}$

→ 5 est une constante multiplicative pour u .

→ -3 est une constante multiplicative pour v .

donc δ est dérivable sur $\mathbb{R}+^*$ et $\delta' = u' + v' + w'$.

→ Formule qui n'est pas dans le cours mais qui tombe sous le sens...

Donc $\delta'(x) = 5\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 3\times\dfrac{-1}{x^2} + 14x - 2$

$= \dfrac{5x\sqrt{x}}{2x^2} + \dfrac{3\times2}{2x^2} + \dfrac{2x^2(14x-2)}{2x^2}$

→ Pour obtenir $2x^2$ comme dénominateur commun, je multiplie $2\sqrt{x}$ par $x\sqrt{x}$ et x^2 par 2 .

$= \dfrac{28x^3-4x^2+6+5x\sqrt{x}}{2x^2}$

---

2. ***a)*** $(uv+w)' = (uv)' + w'$

$= u'v + uv' + w'$

b) f de la forme $uv+w$ avec $\begin{cases} u : x \mapsto x^2+1 \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } u'(x) = 2x \\ v : x \mapsto \sqrt{x} \text{ dérivable sur } \mathbb{R}+^* \text{ et } v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ w : x \mapsto \dfrac{1}{x} \text{ dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et } w'(x) = \dfrac{-1}{x^2}. \end{cases}$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}+^*$ et $f' = u'v + uv' + w'$.

Donc $f'(x) = 2x\times\sqrt{x} + (x^2+1)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{-1}{x^2}$

$= \dfrac{2x\times\sqrt{x}\times2\sqrt{x}\times x^2 + (x^2+1)\times x^2 - 1\times2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\times x^2}$

$= \dfrac{4x^4+x^4+x^2-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\times x^2}$

$= \dfrac{5x^4+x^2-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\times x^2}$

---

3. ***a)*** $\left(u+\dfrac{1}{v}\right)' = u' + \left(\dfrac{1}{v}\right)'$

$= u' - \dfrac{v'}{v^2}$

b) f de la forme $u+\dfrac{1}{v}$ avec $\begin{cases} u : x \mapsto x^2-2x+3 \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } u'(x) = 2x-2 \\ v : x \mapsto \sqrt{x} \text{ dérivable sur } \mathbb{R}+^* \text{ et } v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}. \end{cases}$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}+^*$ et $f' = u' - \dfrac{v'}{v^2}$.

Donc $f'(x) = 2x - 2 - \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$

$= 2x - 2 - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

$= \dfrac{4x^2\sqrt{x} - 4x\sqrt{x} - 1}{2x\sqrt{x}}$

---

4. ***a)*** $\left(\dfrac{1}{uv}\right)' = \dfrac{-(uv)'}{(uv)^2}$

$= \dfrac{-u'v-uv'}{(uv)^2}$

b) $\begin{cases} x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } x=1 \\ \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0 \\ x \text{ doit être positif} \end{cases}$, donc $\mathcal{D}_h =]\,0\,;1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$.

c) f de la forme $\dfrac{1}{uv}$ avec $\begin{cases} u : x \mapsto x^2 - 1 \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } u'(x) = 2x \\ v : x \mapsto \sqrt{x} \text{ dérivable sur } \mathbb{R}+^* \text{ et } v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} . \end{cases}$

Donc f est dérivable sur $\mathcal{D}_h =]\,0\,;1\,[\cup]\,1\,;+\infty\,[$ et $f' = \dfrac{-u'v - uv'}{(uv)^2}$.

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{-2x\times\sqrt{x} - (x^2-1)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{[\,(x^2-1)\sqrt{x}\,]^2}$$

$$= \frac{-4x^2 - x^2 + 1}{2\sqrt{x}\,[\,(x^2-1)\sqrt{x}\,]^2}$$

$$= \frac{1 - 5x^2}{2\sqrt{x}\,[\,(x^2-1)\sqrt{x}\,]^2}$$

---

5. ***a)*** $\left(\dfrac{u}{vw}\right)' = \dfrac{u'(vw) - u(vw)'}{(vw)^2}$

$$= \frac{u'vw - u(v'w + vw')}{(vw)^2}$$

$$= \frac{u'vw - v'uw - w'uv}{(vw)^2}$$

b) $\begin{cases} x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \\ \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ x \text{ doit être positif} \end{cases}$, donc $\mathcal{D}_\psi =]\,0\,;+\infty\,[$.

c) ψ de la forme $\dfrac{u}{vw}$ avec $\begin{cases} u : x \mapsto 1 + 3x \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } u'(x) = 3 \\ v : x \mapsto x + 2 \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } v'(x) = 1 \\ w : x \mapsto \sqrt{x} \text{ dérivable sur } \mathbb{R}+^* \text{ et } v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} . \end{cases}$

Donc ψ est dérivable sur $\mathcal{D}_\psi = \mathbb{R}+^*$ et $\psi' = \dfrac{u'vw - v'uw - w'uv}{(vw)^2}$.

$$\text{Donc } \psi'(x) = \frac{3\times(x+2)\times\sqrt{x} - 1\times(1+3x)\times\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times(1+3x)(x+2)}{[\,(x+2)\sqrt{x}\,]^2}$$

$$= \frac{3(x+2)\sqrt{x}\times 2\sqrt{x} - (1+3x)\sqrt{x}\times 2\sqrt{x} - (1+3x)(x+2)}{2\sqrt{x}\,[\,(x+2)\sqrt{x}\,]^2}$$

$$= \frac{6x(x+2) - 2x(1+3x) - (1+3x)(x+2)}{2\sqrt{x}\,[\,(x+2)\sqrt{x}\,]^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 3x - 2}{2\sqrt{x}\,(\,(x+2)\sqrt{x}\,)^2}$$

---

6. ***a)*** u^2 de la forme uu avec u dérivable sur I

donc u^2 est dérivable sur I et $(u^2)' = u'u + uu' = 2u'u$.

b) f de la forme u^2 avec $u : x \mapsto 3\sqrt{x} + 1$ dérivable sur $\mathbb{R}+^*$ et $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, → 3 constante multiplicative et + 1 constante additive.

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}+^*$ et $f' = 2u'u$.

$$\text{Donc } f'(x) = \cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}\,(3\sqrt{x} + 1)$$

$$= \frac{3\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} .$$

c) g de la forme u^2 avec $u : x \mapsto 3 - \dfrac{1}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $u'(x) = -\dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$, → -1 constante multiplicative et 3 constante additive.

donc g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g' = 2u'u$.

$$\text{Donc } g'(x) = 2\,\frac{1}{x^2}\left(3 - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{2}{x^2}\,\frac{3x-1}{x}$$

$$= \frac{6x - 2}{x^3}$$
