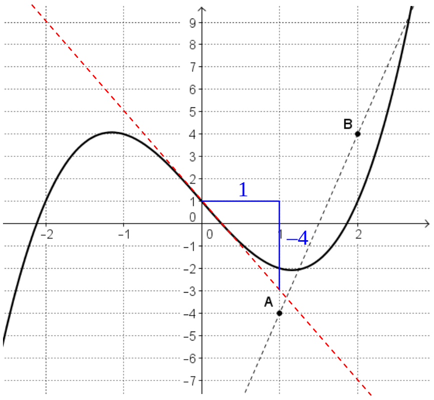
Correction de SOS MATH 1ère S – ÉTUDES DE FONCTIONS - Fiche 7

1. ***a)*** f fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 4$.

b) $f(0) = 0^3 - 4\times 0 + 1 = 1$
donc, la tangente passe par le point $(0\,;1)$.

$f'(0) = 3\times 0^2 - 4 = -4$
donc, la tangente a pour coefficient directeur -4 . → *Un point et le coefficient directeur, ça suffit !*

On peut alors tracer la droite.



c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{4}{3}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{4}{3}}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ou $x = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ → *Mauvaise nouvelle... des valeurs non entières... ça peut arriver.*

$f(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}) = (\dfrac{2\sqrt{3}}{3})^3 - 4\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3} + 1$ → *Évidemment, ça donne des calculs peu agréables !*

$= \dfrac{8\times 3\sqrt{3}}{27} - \dfrac{8\sqrt{3}}{3} + 1$ → *Signalons que $(\sqrt{3})^3$ donne $\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}$, puis $3\sqrt{3}$.*

$= \dfrac{9 - 16\sqrt{3}}{9}$

$f(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}) = (-\dfrac{2\sqrt{3}}{3})^3 - 4\times(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}) + 1$

$= -\dfrac{8\times 3\sqrt{3}}{27} + \dfrac{8\sqrt{3}}{3} + 1$

$= \dfrac{9 + 16\sqrt{3}}{9}$

Donc, la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses aux points $(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,;\dfrac{9-16\sqrt{3}}{9})$ et $(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,;\dfrac{9+16\sqrt{3}}{9})$.

d)

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}/3$		$2\sqrt{3}/3$		$+\infty$
Signes de f'		+	0	–	0	+	
Variations de f		↗	$\dfrac{9+16\sqrt{3}}{9}$	↘	$\dfrac{9-16\sqrt{3}}{9}$	↗	

Grosses valeurs, mais les calculs sont déjà faits...

e) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3} = 1{,}15...$ est dans l'intervalle $[1\,;2]$. → *Le placement des différentes valeurs les unes par rapport aux autres est essentiel.*

$f(1) = 1^3 - 4\times 1 + 1 = -2$
$f(2) = 2^3 - 4\times 2 + 1 = 1$

x	1		$2\sqrt{3}/3$		2
Variations de f	-2	↘	$\dfrac{9-16\sqrt{3}}{9}$	↗	1

La méthode consiste à limiter le tableau de variations à l'intervalle.

On en déduit : $\dfrac{9-16\sqrt{3}}{9} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

f) $M(x;y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ colinéaires

$\Leftrightarrow (x-1)\times 8 - (y+4)\times 1 = 0$

$\Leftrightarrow 8x - 8 - y - 4 = 0$

Donc, $(AB) : 8x - y - 12 = 0$.

g) $8x - y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 8x - 4$,
donc (AB) a pour coefficient directeur 8 .

$f'(x) = 8 \Leftrightarrow 3x^2 - 4 = 8$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$ → *Ah ! C'est plus sympa...*

$f(2) = 1$ → *Déjà calculé.*

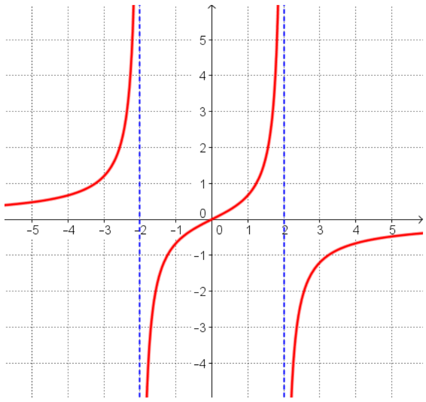
$f(-2) = (-2)^3 - 4\times(-2) + 1 = 1$

Donc, la courbe admet une tangente parallèle à (AB) aux points $(2;1)$ et $(-2;1)$.

---

2. **Partie A**

Bien évidemment, on commence par tracer la fonction pour avoir une idée des réponses à venir !



a) $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$

Donc, le domaine de définition de g est $\mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$.

b) g de la forme $\frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u : x \mapsto -2x \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } u'(x) = -2 \\ v : x \mapsto x^2 - 4 \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } v'(x) = 2x \end{cases}$.

v s'annule en -2 et 2 , donc g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$ et $g' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Donc $g'(x) = \frac{-2(x^2-4) - (-2x)\times 2x}{(x^2-4)^2}$

$= \frac{-2x^2 + 8 + 4x^2}{(x^2-4)^2}$

$= \frac{2x^2 + 8}{(x^2-4)^2}$

c) $\begin{cases} x^2 \text{ toujours positif car carré} \Rightarrow 2x^2 + 8 \text{ toujours positif} \\ (x^2-4)^2 \text{ toujours positif car carré} \end{cases} \Rightarrow g'(x)$ positif sur $\mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$.

Donc g croissante sur $]-;-2[$, sur $]-2;2[$ et sur $]2;+\infty[$.

d)

x	$-\infty$	-2		2		$+\infty$
Signes de g'	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
Variations de g	↗	‖	↗	‖	↗	

Partie B

a) $g(0) = \frac{-2\times 0}{0^2 - 4} = 0$

$g'(0) = \frac{2\times 0^2 + 8}{(0^2-4)^2} = \frac{1}{2}$

Une équation de (d) est $y = g'(0)(x-0) + g(0)$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$.

b) $g(x) - \frac{1}{2}x = \frac{-2x}{x^2-4} - \frac{1}{2}x$

$= \frac{-2x\times 2 - x(x^2-4)}{2(x^2-4)}$

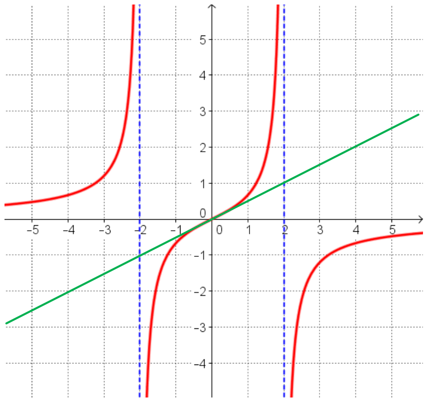
$= \frac{-4x - x^3 + 4x}{2(x^2-4)}$

$= \frac{-x^3}{2(x^2-4)}$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
Signes de $-x^3$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Signes de x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Signes de $g(x)-\frac{1}{2}x$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

On en déduit que (C_g) est au-dessus de (d) sur $]-\infty\,;-2[$ et sur $]0\,;2[$, et en-dessous de (d) sur $]-2\,;0[$ et sur $]2\,;+\infty[$.

Ce qui se confirme en traçant la tangente d'équation $y=\frac{1}{2}x$:



Partie C

a) f de la forme $w+g$ avec $\begin{cases} w: x \mapsto x+1 \text{ croissante sur } \mathbb{R} \text{ et donc sur } [0\,;\sqrt{3}\,] \\ g \text{ croissante sur }]-2\,;2[\text{ et donc sur } [0\,;\sqrt{3}\,], \end{cases}$

donc f croissante sur $[0\,;\sqrt{3}\,]$.

→ Il faut absolument voir que f est la somme de deux fonctions croissantes, au risque de perdre un temps fou…

b) $\begin{cases} f(0) = 0+1+g(0) = 1 \\ f(\sqrt{3}\,) = \sqrt{3}+1-\dfrac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3}\,)^2-4} = 1+3\sqrt{3} \end{cases}$

$0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3} \Rightarrow f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(\sqrt{3}\,)$ car f croissante sur $[0\,;\sqrt{3}\,]$

$\Rightarrow 1 \leqslant f(x) \leqslant 1+3\sqrt{3}$.

→ Inutile de faire un tableau !