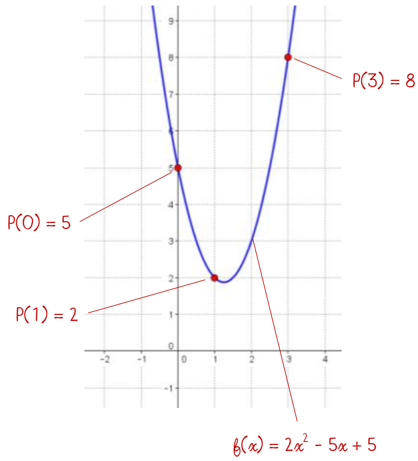
Correction de **SOS MATH 1ère S - POLYNÔMES - Fiche 1**

1. ***a)*** $\begin{cases} P(0)=5 \\ P(1)=2 \\ P(3)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times 0^2+b\times 0+c=5 \\ a\times 1^2+b\times 1+c=2 \\ a\times 3^2+b\times 3+c=8 \end{cases}$ → *Je remplace x par chacun des antécédents.*



$\Leftrightarrow \begin{cases} c=5 \\ a+b+c=2 \\ 9a+3b+c=8 \end{cases}$ → *Chic ! J'ai déjà la valeur de c .*

$\Leftrightarrow \begin{cases} c=5 \\ a+b+5=2 \\ 9a+3b+5=8 \end{cases}$

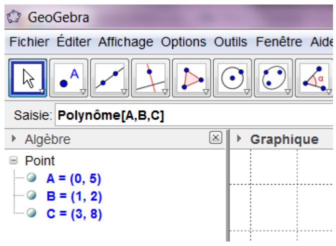
$\Leftrightarrow \begin{cases} c=5 \\ a=-3-b \\ 9(-3-b)+3b+5=8 \end{cases}$ → *Méthode par substitution...*

$\Leftrightarrow \begin{cases} c=5 \\ a=-3-b \\ -6b=8-5+27 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c=5 \\ a=-3-(-5)=2 \\ b=\dfrac{30}{-6}=-5 \end{cases}$

Donc, $P : x \mapsto 2x^2-5x+5$. → *Je conclus pour répondre à la question posée.*

Remarque : *Allez faire un tour sur GeoGebra...*
Définissez trois points A (0,5) , B (1,2) et C (3,8).
Puis, dans la barre de saisie, tapez Polynôme[A,B,C] et admirez...

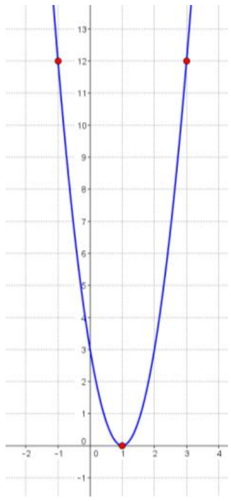


b) Posons $Q : x \mapsto ax^2+bx+c$.

$\begin{cases} Q(1)=0 \\ Q(3)=12 \\ Q(-1)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times 1^2+b\times 1+c=0 \\ a\times 3^2+b\times 3+c=12 \\ a\times(-1)^2+b\times(-1)+c=12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 9a+3b+c=12 \\ a-b+c=12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b+c)-(a-b+c)=0-12 \\ 9a+3b+c=12 \\ a-b+c=12 \end{cases}$ → *Je remplace astucieusement (L_1) par $(L_1)-(L_2)$, et les a et les c disparaissent !*



$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{-12}{2}=-6 \\ 9a+3\times(-6)+c=12 \\ a-(-6)+c=12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-6 \\ 9a+c=30 \\ a+c=6 \end{cases}$

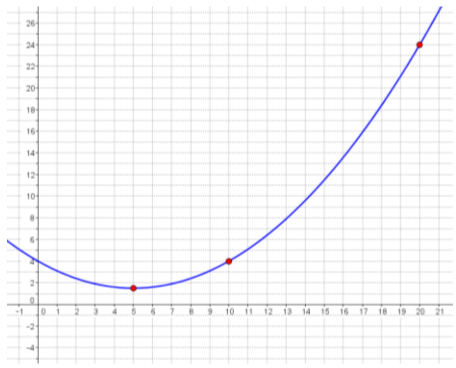
$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-6 \\ 8a=24 \\ a+c=6 \end{cases}$ → *Je remplace (L_2) par $(L_2)-(L_3)$.*

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-6 \\ a=3 \\ c=6-3=3 \end{cases}$

Donc, $Q : x \mapsto 3x^2-6x+3$.

c) Posons $R : x \mapsto ax^2+bx+c$.

$\begin{cases} R(10)=4 \\ R(20)=24 \\ R(5)=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times 10^2+b\times 10+c=4 \\ a\times 20^2+b\times 20+c=24 \\ a\times 5^2+b\times 5+c=\dfrac{3}{2} \end{cases}$



$\Leftrightarrow \begin{cases} 100a+10b+c=4 \\ 400a+20b+c=24 \\ 50a+10b+2c=3 \end{cases}$ → *Profitons-en pour multiplier (L_3) par 2 pour éliminer la fraction.*

$\Leftrightarrow$ ...

Par substitution ou soustraction, on obtient : $\begin{cases} a=\dfrac{1}{10} \\ b=-1 \\ c=4 \end{cases}$

Donc, $R : x \mapsto \dfrac{x^2}{10}-x+4$.

d) Il s'agit ici d'un raisonnement par l'absurde :

Supposons qu'il existe un tel trinôme du second degré $T : x \mapsto ax^2 + bx + c$.
Alors, on aurait : → Remarquez le conditionnel ! Il est important...

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(2) = 2 \\ T(3) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times 1^2 + b\times 1 + c = 1 \\ a\times 2^2 + b\times 2 + c = 2 \\ a\times 3^2 + b\times 3 + c = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 3a + b = 1 \ : (L_2) - (L_1) \\ 8a + 2b = 2 \ : (L_3) - (L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ b = 1 - 3a \\ 8a + 2(1 - 3a) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ b = 1 - 3a \\ 2a = 2 - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ b = 1 - 3a \\ a = 0 \end{cases}$$

→ Inutile de continuer à déterminer b et c ! C'est déjà fichu...

Or, que a soit nul entraîne que T n'est pas du second degré. → Je montre la contradiction.
L'hypothèse de départ est donc absurde. → Je remets en cause l'hypothèse absurde.

On en conclut qu'il n'existe pas un tel trinôme du second degré. → Je n'oublie pas de conclure.

e) Posons $S : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} S(-1) = 7 \\ S(1) = 1 \\ S(2) = 4 \\ S(3) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times(-1)^2 + b\times(-1) + c = 7 \\ a\times 1^2 + b\times 1 + c = 1 \\ a\times 2^2 + b\times 2 + c = 4 \\ a\times 3^2 + b\times 3 + c = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 7 \\ a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 4 \\ 9a + 3b + c = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b = 6 \ : (L_1) - (L_2) \\ a + b + c = 1 \\ c = 4 - 4a - 2b \\ 9a + 3b + c = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a - 3 + 10 - 4a = 1 \\ c = 4 - 4a - 2\times(-3) = 10 - 4a \\ 9a + 3b + c = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ -3a = 1 - 7 \\ c = 10 - 4a \\ 9a + 3b + c = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = \frac{-6}{-3} = 2 \\ c = 10 - 4\times 2 = 2 \\ 9a + 3b + c = 9 \end{cases} \text{ : système impossible car } 9\times 2 + 3\times(-3) + 2 = 18 - 9 + 2 = 11 \neq 9$$

On en conclut qu'il n'existe pas un tel trinôme du second degré. → Je n'oublie pas de conclure.

---

2. **a)** $(x - 2)(ax^2 + bx + c) = -2x^3 + 3x^2 + 5x - 6$

$\Leftrightarrow ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c = -2x^3 + 3x^2 + 5x - 6$ → Je développe l'expression de gauche.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b - 2a = 3 \\ c - 2b = 5 \\ -2c = -6 \end{cases}$$

→ J'identifie termes à termes.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 + 2\times(-2) = -1 \\ c - 2b = 5 \\ c = \frac{-6}{-2} = 3 \end{cases}$$

→ Je "gèle" la troisième équation.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ c = 3 \end{cases} \text{ car } c - 2b = 5$$

→ Je conclus avec soulagement que l'équation "gelée" soit vérifiée.

b) $(x-1)^2(ax^2+bx+c) = 3x^4-4x^3+1$

$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)(ax^2+bx+c) = 3x^4-4x^3+1$ → Je développe l'expression de gauche…

$\Leftrightarrow ax^4+(b-2a)x^3+(a-2b+c)x^2+(b-2c)+c = 3x^4-4x^3+1$ → … en deux étapes.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b-2a=-4 \\ a-2b+c=0 \\ b-2c=0 \\ c=1 \end{cases}$ → J'identifie termes à termes. Oh ! Surprise… 5 équations pour 3 inconnues…

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4+2\times3=2 \\ a-2b+c=0 \\ b-2c=0 \\ c=1 \end{cases}$ → Je "gèle" la troisième et la quatrième équations.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$ car $\begin{cases} 3-2\times2+1=3-4+1=0 \\ 2-2\times1=0 \end{cases}$ → Il y a donc deux équations à vérifier !

---

3. Quelques rappels sur les égalités de fractions :

Propriété 1 :

Si on sait que $N_1 = N_2$, alors $\dfrac{N_1}{D} = \dfrac{N_2}{D}$ sous la condition que D soit non nul.

Propriété 2 :

Si on sait que $\dfrac{N_1}{D} = \dfrac{N_2}{D}$ (et donc nécessairement que D est déjà non nul), alors $N_1 = N_2$.

On en déduit :

Propriété 3 :

Pour D non nul : $\dfrac{N_1}{D} = \dfrac{N_2}{D} \Leftrightarrow N_1 = N_2$

a) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\,;0\}$: → Je précise les conditions qui permettent de justifier l'équivalence

$\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a(x+1)}{x(x+1)} + \dfrac{bx}{x(x+1)}$ → Je réduis au même dénominateur.

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{ax+a+bx}{x(x+1)}$

$\Leftrightarrow 1 = ax+a+bx$ → Je développe l'expression de gauche.

$\Leftrightarrow 0x+1 = (a+b)x+a$ → Je fais apparaître les formes développées.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases}$ → J'identifie.

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$

b) Pour tout réel x différent de 1 et $-\dfrac{3}{2}$:

$\dfrac{1}{(x-1)(2x+3)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{2x+3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(x-1)(2x+3)} = \dfrac{a(2x+3)+b(x-1)}{(x-1)(2x+3)}$

$\Leftrightarrow 1 = a(2x+3)+b(x-1)$

$\Leftrightarrow 1 = 2ax+3a+bx-b$

$\Leftrightarrow 0x+1 = (2a+b)x+3a-b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=0 \\ 3a-b=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a=1 \\ b=-2a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{5} \\ b=-\dfrac{2}{5} \end{cases}$

c) Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{ -3 \}$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2 + 14x - 1}{x+3} = \frac{(ax+b)(x+3)+c}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 14x - 1 = ax^2 + 3ax + bx + 3b + c$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 14x - 1 = ax^2 + (3a+b)x + 3b + c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ 3a + b = 14 \\ 3b + c = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 14 - 3\times5 = -1 \\ c = -1 - 3\times(-1) = 2 \end{cases}$$

---

4. a)

$$\begin{cases} P(2) = 5 \\ P(-1) = 5 \\ P(3) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times2^2 + b\times2 + c = 5 \\ a\times(-1)^2 + b\times(-1) + c = 5 \\ a\times3^2 + b\times3 + c = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 5 \\ a - b + c = 5 \\ 9a + 3b + c = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ldots$$

Par substitution ou soustraction, on obtient : $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 5 \end{cases}$

Donc, P est la fonction constante $x \mapsto 5$.

b)

$$\begin{cases} P(-1) = k \\ P(0) = k \\ P(1) = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times(-1)^2 + b\times(-1) + c = k \\ a\times0^2 + b\times0 + c = k \\ a\times1^2 + b\times1 + c = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = k \\ c = k \\ a + b + c = k \end{cases}$$

→ Attention, k n'est pas une inconnue, c'est un paramètre.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + k = k \\ c = k \\ a + b + k = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ c = k \\ a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = k \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc, P est la fonction constante $x \mapsto k$.

c)

$$P(1) = P(2) = P(3) \Leftrightarrow a\times1^2 + b\times1 + c = a\times2^2 + b\times2 + c = a\times3^2 + b\times3 + c$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 4a + 2b + c = 9a + 3b + c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 4a + 2b + c \\ 4a + 2b + c = 9a + 3b + c \end{cases}$$

→ Aïe, 2 équations pour 3 inconnues...

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ 5a + b = 0 \end{cases}$$

→ Ah, ben non finalement... où est donc passé c ?

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

On en déduit que P est de la forme $x \mapsto c$.
C'est bien une fonction constante.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 14 - 3\times5 = -1 \\ c = -1 - 3\times(-1) = 2 \end{cases}$$

---

5. ***a)*** $(x^2+\alpha x+\beta)^2 = (x^2+\alpha x+\beta)(x^2+\alpha x+\beta)$

$$= x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\alpha x^3+\alpha^2x^2+\alpha\beta x+\beta x^2+\alpha\beta x+\beta^2$$

$$= x^4+2\alpha x^3+(\alpha^2+2\beta)x^2+2\alpha\beta x+\beta^2$$

b) $x^4-2x^3-x^2+mx+p = x^4+2\alpha x^3+(\alpha^2+2\beta)x^2+2\alpha\beta x+\beta^2$

$\Leftrightarrow$ $x^4-2x^3-x^2+mx+p = x^4+2\alpha x^3+(\alpha^2+2\beta)x^2+2\alpha\beta x+\beta^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha=-2 \\ \alpha^2+2\beta=-1 \\ 2\alpha\beta=m \\ \beta^2=p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{-2}{2}=-1 \\ 2\beta=-1-(-1)^2=-2 \\ 2\alpha\beta=m \\ \beta^2=p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=\dfrac{-2}{2}=-1 \\ m=2\times(-1)\times(-1)=2 \\ p=(-1)^2=1 \end{cases}$$

Il faut donc que $m=2$ et $p=1$ pour que $x^4-2x^3-x^2+mx+p$ soit le carré d'un trinôme du second degré.
Ce trinôme du second degré est alors x^2-x-1 .

Une petite vérification s'impose :
$(x^2-x-1)^2$ devient bien $x^4-2x^3-x^2+2x+1$.