Correction de SOS MATH 1ère S - POLYNÔMES - Fiche 3

1. ***a)*** $x^2 + 8x - 30 = x^2 + 2 \times x \times 4 + 16 - 16 - 30$ → Pas besoin de factoriser par a (il vaut 1), je peux tout de suite faire apparaître $A^2 + 2AB + B^2$.

$= (x + 4)^2 - 46$ → C'est déjà fini....

b) $-x^2 + 10x + 29 = -(x^2 - 10x - 29)$ → Je factorise par -1, ce qui change les signes.

$= -(x^2 - 2 \times x \times 5 + 25 - 25 - 29)$ → Je fais apparaître $A^2 + 2AB + B^2$.

$= -[(x - 5)^2 - 54]$ → Je factorise en $(A + B)^2$.

$= -(x - 5)^2 + 54$ → Je redistribue le $-$.

c) $x^2 + 15x + 30 = x^2 + 2 \times x \times \frac{15}{2} + \frac{225}{4} - \frac{225}{4} + 30$ → 15 étant impair, pour faire apparaître le $2AB$, il faut que B soit la fraction $\frac{15}{2}$.

$= \left(x + \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{105}{4}$

d) $2x^2 - 24x + 10 = 2(x^2 - 12x + 5)$ → Je factorise par 2.

$= 2(x^2 - 2 \times x \times 6 + 36 - 36 + 5)$

$= 2[(x - 6)^2 - 31]$

$= 2(x - 6)^2 - 62$

e) $2x^2 + 22x - 2 = 2(x^2 + 11x - 1)$

$= 2\left(x^2 + 2 \times x \times \frac{11}{2} + \frac{121}{4} - \frac{121}{4} - 1\right)$ → Même remarque qu'au c).

$= 2\left[\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{125}{4}\right]$

$= 2\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{125}{2}$

f) $2x^2 + 21x - 3 = 2\left(x^2 + \frac{21}{2}x - \frac{3}{2}\right)$ → 21 étant impair, la factorisation par 2 fait apparaître les fractions $\frac{21}{2}$ et $\frac{3}{2}$...

$= 2\left(x^2 + 2 \times x \times \frac{21}{4} + \frac{441}{16} - \frac{441}{16} - \frac{3}{2}\right)$ → ... ce qui complique le $2AB$!

$= 2\left[\left(x + \frac{21}{4}\right)^2 - \frac{465}{16}\right]$

$= 2\left(x + \frac{21}{4}\right)^2 - \frac{465}{8}$

g) $9x^2 - 12x + 1 = 9\left(x^2 - \frac{12}{9}x + \frac{1}{9}\right)$

$= 9\left(x^2 - 2 \times x \times \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} + \frac{1}{9}\right)$ → Attention à $\frac{12}{9}$ qui a été simplifiée en $\frac{4}{3}$ avant de devenir $2 \times \frac{2}{3}$.

$= 9\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{3}{9}\right]$

$= 9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - 3$

h) $7x^2 + 6x + 1 = 7\left(x^2 + \frac{6}{7}x + \frac{1}{7}\right)$

$= 7\left(x^2 + 2 \times x \times \frac{3}{7} + \frac{9}{49} - \frac{9}{49} + \frac{1}{7}\right)$

$= 7\left[\left(x + \frac{3}{7}\right)^2 - \frac{2}{49}\right]$

$= 7\left(x + \frac{3}{7}\right)^2 - \frac{2}{7}$

---

2. ***a)*** <u>1ère méthode</u>

$x^2 + 12x + 20 = x^2 + 2 \times x \times 6 + 36 - 36 + 20$

$= (x + 6)^2 - 16$

<u>2ème méthode</u>

$x^2 + 12x + 20$ s'écrit sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec :

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{12}{2 \times 1} = -6 \\ \beta = (-6)^2 + 12 \times (-6) + 20 = 36 - 72 + 20 = -16 \\ a \text{ est le coefficient dominant } 1 \end{cases}$$

donc $x^2 + 12x + 20 = (x + 6)^2 - 16$.

b) $x^2 + 12x + 20 = (x+6)^2 - 16$
$= (x+6)^2 - 4^2$
$= (x+6-4)(x+6+4)$
$= (x+2)(x+10)$

c) $x^2 + 12x + 20 = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)(x+10) = 0$
$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = -10$

Donc : $\mathscr{S} = \{-2\ ;-10\}$.

---

3. **a)** 1

<u>1ère méthode</u>

$Q(x) = 2(x^2 - 10x + 43)$
$= 2(x^2 - 2\times x\times 5 + 25 - 25 + 43)$
$= 2[(x-5)^2 + 18]$
$= 2(x-5)^2 + 36$

<u>2ème méthode</u>

$Q(x)$ s'écrit sous la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec :

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{-20}{2\times 2} = 5 \\ \beta = Q(\alpha) = 2\times 5^2 - 20\times 5 + 86 = 36 \\ a \text{ est le coefficient dominant } 2 . \end{cases}$$

donc $Q(x) = 2(x-5)^2 + 36$.

b) <u>Pour ceux qui ont utilisé la 1ère méthode</u>

$Q(x) = 0$
$\Leftrightarrow 2[(x-5)^2 + 18] = 0$
$\Leftrightarrow (x-5)^2 + 18 = 0$
$\Leftrightarrow (x-5)^2 = -18$

C'est impossible car un carré est toujours positif.
Donc : $\mathscr{S} = \varnothing$.

<u>Pour ceux qui ont utilisé la 2ème méthode</u>

$Q(x) = 0$
$\Leftrightarrow 2(x-5)^2 + 36 = 0$
$\Leftrightarrow 2(x-5)^2 = -36$
$\Leftrightarrow (x-5)^2 = -18$

C'est impossible car un carré est toujours positif.
Donc : $\mathscr{S} = \varnothing$.

---

4. **a)** $x^2 + 8x - 33 = x^2 + 2\times x\times 4 + 16 - 16 - 33$
$= (x+4)^2 - 49$
$= (x+4)^2 - 7^2$
$= (x+4-7)(x+4+7)$
$= (x-3)(x+11)$

b) $x^2 + 13x + 36 = x^2 + 2\times x\times\frac{13}{2} + \frac{169}{4} - \frac{169}{4} + 36$

$$= \left(x + \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

$$= \left(x + \frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$= \left(x + \frac{13}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{13}{2} + \frac{5}{2}\right)$$

$= (x+4)(x+9)$

c) $2x^2 - 12x + 16 = 2(x^2 - 6x + 8)$
$= 2(x^2 - 2\times x\times 3 + 9 - 9 + 8)$
$= 2[(x-3)^2 - 1]$
$= 2(x-3-1)(x-3+1)$
$= 2(x-4)(x-2)$ → On pourrait écrire $(2x-4)(x-2)$ ou $(x-4)(2x-4)$, mais c'est inutile.

d) $x^2 - 10x + 29 = x^2 - 2\times x\times 5 + 25 - 25 + 29$
$= (x-5)^2 + 4$

$(x-5)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 = -4$
C'est impossible car un carré ne peut être négatif,
donc $(x-5)^2 + 4$ n'a pas de racine,
donc $(x-5)^2 + 4$ n'est pas factorisable,
et donc $x^2 - 10x + 29$ n'est pas factorisable non plus.

e) $3x^2 + 6x - 3 = 3(x^2 + 2x - 1)$
$= 3(x^2 + 2\times x\times 1 + 1 - 1 - 1)$
$= 3[(x+1)^2 - 2]$
$= 3[(x+1)^2 - (\sqrt{2})^2]$
$= 3(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

f) $-x^2 + 2x - 2 = -(x^2 - 2x + 2)$
$= -(x^2 - 2\times x\times 1 + 1 - 1 + 2)$
$= -[(x-1)^2 + 1]$

$(x-5)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 = -1$
C'est impossible car un carré ne peut être négatif,
donc $(x-5)^2 + 1$ n'a pas de racine
donc $(x-5)^2 + 1$ n'est pas factorisable,
et donc $-x^2 + 2x - 2$ n'est pas factorisable non plus.

g) $6x^2+6x-\dfrac{3}{2} = 6\left(x^2+x-\dfrac{3}{12}\right)$

$= 6\left(x^2+2\times x\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\right)$

$= 6\left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}\right]$

$= 6\left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$ → $\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$= 6\left(x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 6\left(x+\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ → C'est un peu plus joli comme ça...

h) $-x^2+18x-72 = -(x^2-18x+72)$

$= -(x^2-2\times x\times 9+81-81+72)$

$= -[(x-9)^2-9]$

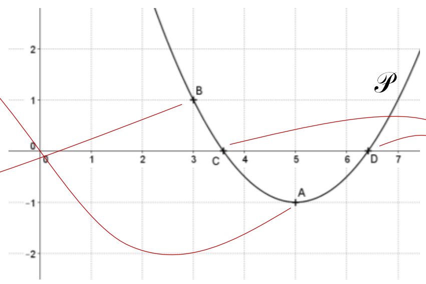
$= -[(x-9)^2-3^2]$

$= -(x-9-3)(x-9+3)$

$= -(x-12)(x-6)$ → Qu'on peut aussi écrire $(-x+12)(x-6)$ ou $(x-12)(-x+6)$.

---

5. ***a)*** Le sommet A de $\mathscr{P}$ a pour coordonnées $(5\,;-1)$
donc $p(x)$ s'écrit sous la forme $a(x-5)^2-1$.



$B\in\mathscr{P}$
donc :

$p(3)=1$

$\Leftrightarrow\ a(3-5)^2-1=1$

$\Leftrightarrow\ a=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

donc $p(x)=\dfrac{1}{2}(x-5)^2-1$.

b) $p(x)=0$ → Les abscisses des points d'intersection avec l'axe sont les solutions de $p(x)=0$.

$\Leftrightarrow\ \dfrac{1}{2}(x-5)^2-1=0$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{1}{2}[(x-5)^2-2]=0$ → Le mieux est de factoriser $\dfrac{1}{2}$ ...

$\Leftrightarrow\ (x-5)^2-2=0$ → ... pour ne garder que la forme A^2- ...

$\Leftrightarrow\ (x-5)^2-(\sqrt{2})^2=0$ → ... B^2 .

$\Leftrightarrow\ (x-5-\sqrt{2})(x-5+\sqrt{2})=0$

$\Leftrightarrow\ x=5+\sqrt{2}$ ou $x=5-\sqrt{2}$

Donc : $C(5-\sqrt{2}\,;0)$ et $D(5+\sqrt{2}\,;0)$. → Attention à répondre à la question posée ! Pas de « $\mathscr{S}$ = ... » .
On peut vérifier que $5-\sqrt{2}\approx 3{,}58$... et $5+\sqrt{2}\approx 6{,}41$... ce qui est cohérent avec le graphique.

---

6. ***a)*** $A(1\,;0)$ et $B(9\,;0)$ sont sur $\mathscr{Q}$
donc $q(1)=0$ et $q(9)=0$
donc 1 et 9 sont les racines de q
donc $q(x)$ s'écrit sous la forme $a(x-1)(x-9)$.

$q(x) = a(x-1)(x-9)$

$= a(x^2-9x-x+9)$

$= a(x^2-10x+9)$

$= a(x^2-2\times x\times 5+25-25+9)$

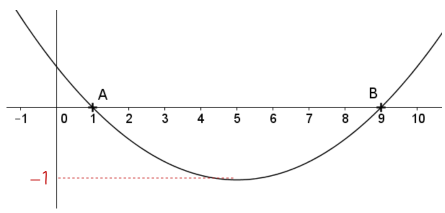
$= a[(x-5)^2-16]$

$= a(x-5)^2-16a$

b) Le minimum de q est -1
donc le sommet a pour ordonnée -1
donc, d'après la forme canonique obtenue au *a)* :

$-16a=-1$

$\Leftrightarrow\ a=\dfrac{1}{16}$



On remarque que l'abscisse du sommet 5 , la moyenne entre 1 et 9 .