Correction de SOS MATH $1^{ère}$ S - POLYNÔMES - Fiche 4

1. *a)* $\Delta = (-1)^2 - 4\times1\times(-132) = 529 > 0$

donc, il y a deux racines $\dfrac{-(-1)+\sqrt{529}}{2\times1} = 12$ et $\dfrac{-(-1)-\sqrt{529}}{2\times1} = -11$.

b) $\Delta = (-13)^2 - 4\times2\times(-7) = 225 > 0$

donc, il y a deux racines $\dfrac{-(-13)+\sqrt{225}}{2\times2} = 7$ et $\dfrac{-(-13)-\sqrt{225}}{2\times2} = -\dfrac{1}{2}$.

c) $\Delta = 4^2 - 4\times5\times3 = -44 < 0$
donc, il n'y a pas de racine.

d) $\Delta = (-12)^2 - 4\times9\times4 = 0$

donc, il y a une racine $\dfrac{-(-12)}{2\times9} = \dfrac{2}{3}$.

---

2. *a)* $\Delta = (-3)^2 - 4\times1\times2 = 1 > 0$

donc, il y a deux solutions $\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times1} = 2$ et $\dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times1} = 1$.

b) $\Delta = (-1)^2 - 4\times2\times(-1) = 9 > 0$

donc, il y a deux solutions $\dfrac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times2} = 1$ et $\dfrac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times2} = -\dfrac{1}{2}$.

c) $\Delta = (-2)^2 - 4\times3\times\dfrac{1}{3} = 0$

donc, il y a une seule solution $\dfrac{-(-2)}{2\times3} = \dfrac{1}{3}$.

d) $\Delta = 2^2 - 4\times(-1)\times1 = 8 > 0$

donc, il y a deux solutions $\dfrac{-2+\sqrt{8}}{2\times(-1)} = 1-\sqrt{2}$ et $\dfrac{-2-\sqrt{8}}{2\times(-1)} = 1+\sqrt{2}$.

e) $\Delta = 8^2 - 4\times3\times(-3) = 100 > 0$

donc, il y a deux solutions $\dfrac{-8+\sqrt{100}}{2\times3} = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{-8-\sqrt{100}}{2\times3} = -3$.

f) $\Delta = 1^2 - 4\times1\times1 = -3 < 0$
donc, il n'y a pas de solution.

g) $\Delta = 1{,}5^2 - 4\times0{,}75\times0{,}5 = 0{,}75 = \dfrac{3}{4} > 0$

donc, il y a deux solutions $\dfrac{-\dfrac{3}{2}+\sqrt{\dfrac{3}{4}}}{2\times\dfrac{3}{4}} = \dfrac{-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{3}{2}} = -1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\dfrac{-\dfrac{3}{2}-\sqrt{\dfrac{3}{4}}}{2\times\dfrac{3}{4}} = -1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

h) $\Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4\times1\times2 = 0$

donc, il y a une seule solution $\dfrac{-(-2\sqrt{2})}{2\times1} = \sqrt{2}$.

---

3. *a)* $\Delta = 7^2 - 4\times2\times(-15) = 169 > 0$

donc, il y a deux racines $\dfrac{-7+\sqrt{169}}{2\times2} = \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{-7-\sqrt{169}}{2\times2} = -5$

De plus, le coefficient dominant est 2 ,

donc, $2x^2 + 7x - 15 = 2\,(\,x - \dfrac{3}{2}\,)\,(\,x+5\,)$

$= (\,2x-3\,)\,(\,x+5\,)$ → *On aurait pu écrire* $(\,x - \dfrac{3}{2}\,)\,(\,2x+10\,)$, *mais c'est moins joli ...*

b) $\Delta = (-1)^2 - 4\times1\times(-1) = 5 > 0$

donc, il y a deux racines $\dfrac{-(-1)+\sqrt{5}}{2\times1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\times1} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

De plus, le coefficient dominant est 1 ,

donc, $x^2 - x - 1 = (\,x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,)\,(\,x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,)$.

c) $\Delta = 6^2 - 4\times7\times5 = -104 \ < \ 0$
donc, il n'y a pas de racine,
donc, $7x^2 + 6x + 5$ n'est pas factorisable.

d) $\Delta = (-17)^2 - 4\times289\times(-6) = 7\,225 \ > \ 0$

donc, il y a deux racines $\dfrac{-(-17)+\sqrt{7\,225}}{2\times289} = \dfrac{3}{17}$ et $\dfrac{-(-17)-\sqrt{7\,225}}{2\times289} = -\dfrac{2}{17}$.

De plus, le coefficient dominant est 289 ,

donc, $289x^2 - 17x - 6 = 289\left(x - \dfrac{3}{17}\right)\left(x + \dfrac{2}{17}\right)$ → On pourrait écrire $(289x - 51)\left(x + \dfrac{2}{17}\right)$ ou $\left(x - \dfrac{3}{17}\right)(289x + 34)$, mais c'est moche.

$= 17\times17\left(x - \dfrac{3}{17}\right)\left(x + \dfrac{2}{17}\right)$ → Grosse astuce !

$= (17x - 3)(17x + 2)$ → Classe...

---

4. ***a)***

$f(x) = 2$
$\Leftrightarrow \ x^2 - 5x + 8 = 2$
$\Leftrightarrow \ x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4\times1\times6 = 1 \ > \ 0$

donc, il y a deux solutions $\dfrac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times1} = 3$ et $\dfrac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times1} = 2$.

Les points d'intersection ont donc pour coordonnées $(3\,;2)$ et $(2\,;2)$. → Inutile de calculer $f(3)$ et $f(2)$! On sait qu'ils valent 2 .

b)

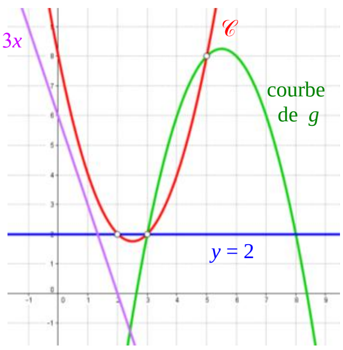
$f(x) = g(x)$
$\Leftrightarrow \ x^2 - 5x + 8 = -x^2 + 11x - 22$
$\Leftrightarrow \ 2x^2 - 16x + 30 = 0$

$\Delta = (-16)^2 - 4\times2\times30 = 16 \ > \ 0$

donc, il y a deux solutions $\dfrac{-(-16)+\sqrt{16}}{2\times2} = 5$ et $\dfrac{-(-16)-\sqrt{16}}{2\times2} = 3$.

$\begin{cases} f(5) = 5^2 - 5\times5 + 8 = 8 \\ f(3) = 2 \end{cases}$ → On sait déjà que $f(3) = 2$.

Les points d'intersection ont donc pour coordonnées $(5\,;8)$ et $(3\,;2)$.



c)

$f(x) = 6 - 3x$
$\Leftrightarrow \ x^2 - 5x + 8 = 6 - 3x$
$\Leftrightarrow \ x^2 - 2x + 2 = 0$

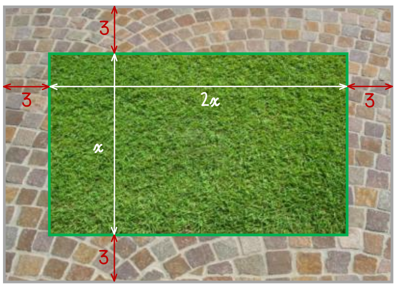
$\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times2 = -4 \ < \ 0$
donc, il n'y a pas de solution,
donc, il n'y a pas de point d'intersection.

---

5. Posons x la largeur de la pelouse. → Comme d'habitude, on pose l'inconnue.
Alors, sa longueur est $2x$.

On en déduit que la largeur du grand rectangle vaut $x + 3 + 3 = x + 6$.
Et la longueur vaut $2x + 3 + 3 = 2x + 6$.

L'aire du grand rectangle est donc $(x + 6)(2x + 6)$.
On en déduit :



$(x + 6)(2x + 6) = 387{,}5$
$\Leftrightarrow \ 2x^2 + 6x + 12x + 36 = 387{,}5$
$\Leftrightarrow \ 2x^2 + 18x - 351{,}5 = 0$

$\Delta = 18^2 - 4\times2\times(-351{,}5) = 3\,136 \ > \ 0$

donc, x peut valoir $\dfrac{-18+\sqrt{3\,136}}{2\times2} = \dfrac{19}{2}$ ou $\dfrac{-18-\sqrt{3\,136}}{2\times2} = -\dfrac{37}{2}$.

Or, x est une largeur et ne peut donc être négatif.

Donc, la largeur de la pelouse est 9,50 m et la longueur est 19 m .

6. Posons n le premier entier. → *L'inconnue est un entier.*

On a donc :

$$n^2 + (n+1)^2 = 1\,513$$
$$\Leftrightarrow n^2 + n^2 + 2n + 1 = 1\,513$$
$$\Leftrightarrow 2n^2 + 2n - 1\,512 = 0$$

$\Delta = 2^2 - 4\times2\times(-1\,512) = 12\,100 > 0$

donc, n peut valoir $\dfrac{-2+\sqrt{12\,100}}{2\times2} = 27$ ou $\dfrac{-2-\sqrt{12\,100}}{2\times2} = -28$.

Les entiers possibles sont 27 et 28 , ou alors -28 et -27 .

---

7. Posons n le nombre de personnes à ce repas.

Chaque personne donne 3 cadeaux à chacune des $n-1$ autres personnes, donc en tout $3n-3$ cadeaux.
Et comme il y a n personnes :

$$n(3n-3) = 1\,950$$
$$\Leftrightarrow 3n^2 - 3n - 1\,950 = 0$$

$\Delta = (-3)^2 - 4\times3\times(-1\,950) = 23\,409 > 0$

donc, n peut valoir $\dfrac{-(-3)+\sqrt{23\,409}}{2\times3} = 26$ ou $\dfrac{-(-3)-\sqrt{23\,409}}{2\times3} = -25$.

Or, n est un entier positif.
Donc, il y a 26 élèves dans cette 1ère S. → *Ben oui...*

---

8. $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = -4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x(3-x) = -4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ -x^2 + 3x + 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x = \dfrac{-3+\sqrt{25}}{2\times(-1)} = -1 \text{ ou } x = \dfrac{-3-\sqrt{25}}{2\times(-1)} = 4 \end{cases}$ car $\Delta = 3^2 - 4\times(-1)\times4 = 25 > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3-(-1) = 4 \\ x = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 3-4 = -1 \\ x = 4 \end{cases}$ → *Attention à ne pas écrire* $\begin{cases} y = 4 \text{ ou } y = -1 \\ x = -1 \text{ ou } x = 4 \end{cases}$ *car on ne saurait pas qui va avec qui...*

Donc : $\mathscr{S} = \{ (-1\,;4)\,;(4\,;-1) \}$. → *Deux couples solutions.*

---

9. ***a)*** $C(300) = 0{,}02\times300^2 + 20\times300 + 4\,150$
$= 1\,800 + 6\,000 + 4\,150$
$= 11\,950$

Donc, pour la fabrication de 300 objets, le coût de production est de 11 950 €.

b)

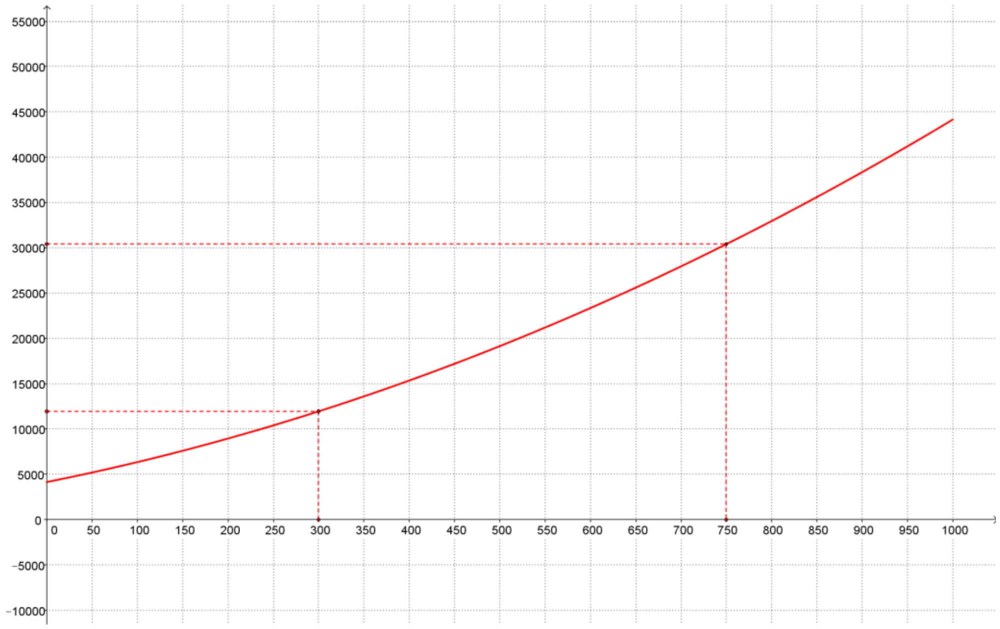
$$C(q) = 30\,400$$
$$\Leftrightarrow 0{,}02q^2 + 20q + 4\,150 = 30\,400$$
$$\Leftrightarrow 0{,}02q^2 + 20q - 26\,250 = 0$$

$\Delta = 20^2 - 4\times0{,}02\times(-26\,250) = 2\,500 > 0$

donc, il y a deux solutions $\dfrac{-20+\sqrt{2\,500}}{2\times0{,}02} = 750$ et $\dfrac{-20-\sqrt{2\,500}}{2\times0{,}02} = -1\,750$.

Or, q est un nombre positif.
Donc, le coût de production a-t-il été de 30 400 € pour la fabrication de 750 objets.

c)



d) Le bénéfice est la recette à laquelle on enlève les coûts de production.
Pour q objets fabriqués, la recette est $52q$.
Donc :

$$\begin{aligned} B(q) &= 52q - C(q) \\ &= 52q - (\ 0{,}02q^2 + 20q + 4\ 150\ ) \\ &= -0{,}02q^2 + 32q - 4\ 150 \end{aligned}$$

e) Le coefficient dominant de $B(q)$ est $-0{,}02$ donc négatif.
La parabole représentant B est donc " tournée vers le bas ".
On en déduit que la fonction B atteint un maximum.

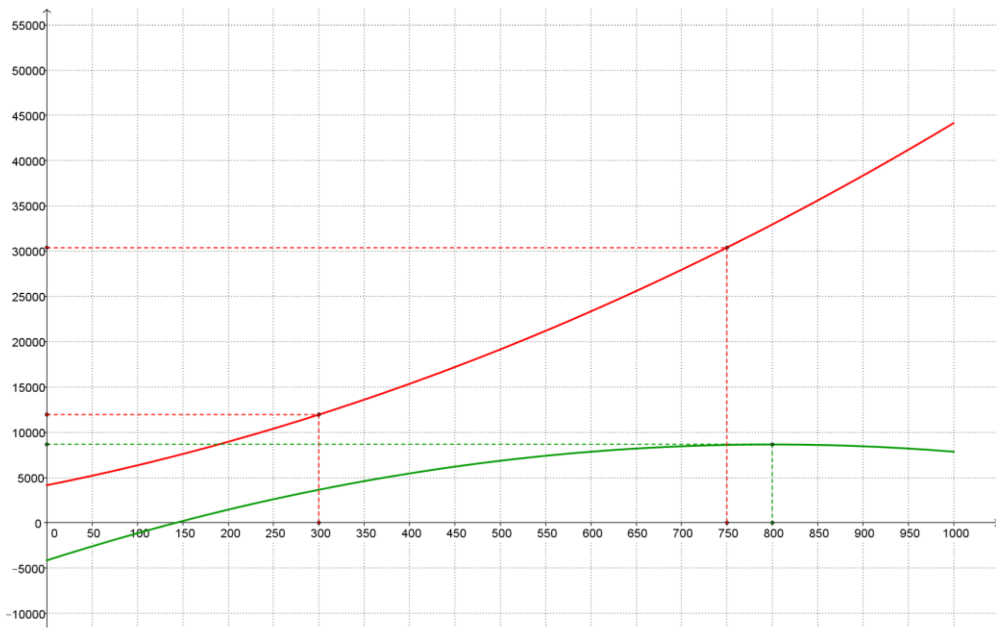
Ce maximum est atteint en $-\dfrac{32}{2\times(-0{,}02)} = 800$.

Donc, il faut fabriquer 800 objets pour atteindre le bénéfice maximum.

$$\begin{aligned} B(800) &= -0{,}02\times800^2 + 32\times800 - 4\ 150 \\ &= -12\ 800 + 25\ 600 - 4\ 150 \\ &= 8\ 650 \end{aligned}$$

Ce bénéfice maximum vaut alors 8 650 €.

f)



g)

$B(q) = 8\ 200$

$\Leftrightarrow\ -0{,}02q^2 + 32q - 4\ 150 = 8\ 200$

$\Leftrightarrow\ -0{,}02q^2 + 32q - 12\ 350 = 0$

$\Delta = 32^2 - 4\times(-0{,}02)\times(-12\ 350) = 36\ >\ 0$

donc, il y a deux solutions $\dfrac{-32+\sqrt{36}}{2\times(-0{,}02)} = 650$ et $\dfrac{-32-\sqrt{36}}{2\times(-0{,}02)} = 950$.

Donc, le bénéfice sera de 8 200 € pour la fabrication de 650 objets ou de 950 objets.

h) $b(q) = 0$

$\Leftrightarrow$ $-0{,}02q^2 + 32q - 4\,150 = 0$

$\Delta = 32^2 - 4\times(-0{,}02)\times(-4\,150) = 692 > 0$

donc, il y a deux solutions $\dfrac{-32+\sqrt{692}}{2\times(-0{,}02)} = 142{,}35...$ et $\dfrac{-32-\sqrt{692}}{2\times(-0{,}02)} = 1\,457{,}64...$ → Toujours très efficace, cette notation à virgule et pointillés !

Donc, le bénéfice devient positif à partir de 143 objets fabriqués.

On remarque que ce bénéfice redevient négatif à partir de 1 458 objets fabriqués.