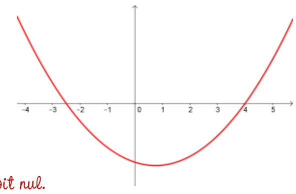
Correction de SOS MATH 1ère S - POLYNÔMES - Fiche 6



1. ***a)*** $\Delta = (-6)^2 - 4\times4\times(-40) = 676 \; > \; 0$

Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-(-6)+\sqrt{676}}{2\times4} = 4$ et $\dfrac{-(-6)-\sqrt{676}}{2\times4} = -\dfrac{5}{2}$.

$4x^2 - 6x - 40$ est du signe du coefficient dominant 4 , donc positif, à l'extérieur des racines,

donc : $\mathscr{S} = \left]-\infty\,;-\dfrac{5}{2}\right] \cup [\,4\,;+\infty\,[$.

→ Racines comprises car on accepte que ce soit nul.

b) $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times(-63) = 256 \; > \; 0$

Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-(-2)+\sqrt{256}}{2\times1} = 9$ et $\dfrac{-(-2)-\sqrt{256}}{2\times1} = -7$.

$x^2 - 2x - 63$ est du signe du coefficient dominant 1 , donc positif, à l'extérieur des racines,

→ Et donc négatif à l'intérieur des racines.

donc : $\mathscr{S} = \,]-7\,;9\,[$.

c) $\Delta = (-2)^2 - 4\times9\times\dfrac{1}{9} = 0$

Donc, il y a une seule racine qui est $-\dfrac{-2}{2\times9} = \dfrac{1}{9}$.

$9x^2 - 2x + \dfrac{1}{9}$ est du signe du coefficient dominant 9 , donc positif, à l'extérieur de la racine,

→ Et donc négatif nulle part mais nul en la racine.

donc : $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{1}{9}\right\}$.

d) $\Delta = (-23)^2 - 4\times(-3)\times8 = 625 \; > \; 0$

Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-(-23)+\sqrt{625}}{2\times(-3)} = -8$ et $\dfrac{-(-23)-\sqrt{625}}{2\times(-3)} = \dfrac{1}{3}$.

$-3x^2 - 23x + 8$ est du signe du coefficient dominant -3 , donc négatif, à l'extérieur des racines,

donc : $\mathscr{S} = \,]-\infty\,;-8\,[\, \cup \left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

e) $\Delta = 4^2 - 4\times1\times(-5) = 36 \; > \; 0$

Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-4+\sqrt{36}}{2\times1} = 1$ et $\dfrac{-4-\sqrt{36}}{2\times1} = -5$.

$x^2 + 4x - 5$ est du signe du coefficient dominant 1 , donc positif, à l'extérieur des racines,

donc : $\mathscr{S} = \,]-\infty\,;5\,] \cup [\,1\,;+\infty\,[$.

→ Racines comprises car on accepte que ce soit nul.

f) $\Delta = (-4)^2 - 4\times5\times1 = -4 \; < \; 0$

Donc, il n'y a pas de racine.

$5x^2 - 4x + 1$ est de signe constant, celui du coefficient dominant 5 , donc positif.

→ Positif partout...

Donc : $\mathscr{S} = \mathbb{R}$.

g) $\Delta = (-1)^2 - 4\times(-3)\times2 = 25 \; > \; 0$

Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times(-3)} = -1$ et $\dfrac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times(-3)} = \dfrac{2}{3}$.

$-3x^2 - x + 2$ est du signe du coefficient dominant -3 , donc négatif, à l'extérieur des racines,

→ Et donc positif à l'intérieur des racines.

donc : $\mathscr{S} = \left]-1\,;\dfrac{2}{3}\right[$.

h) $\Delta = 1^2 - 4\times6\times(-15) = 361 \; > \; 0$

Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-1+\sqrt{361}}{2\times6} = \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{361}}{2\times6} = -\dfrac{5}{3}$.

$6x^2 + x - 15$ est du signe du coefficient dominant 6 , donc positif, à l'extérieur des racines,

donc : $\mathscr{S} = \left]-\infty\,;-\dfrac{5}{3}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

i) $\Delta = 4^2 - 4\times(-7)\times(-3) = -68 \; < \; 0$

→ Attention, on a mélangé les termes ! a n'est pas 4 et b n'est pas -7 ...

Donc, il n'y a pas de racine.

$4x - 7x^2 - 3$ est de signe constant, celui du coefficient dominant -7 , donc négatif.

→ Négatif partout...

Donc : $\mathscr{S} = \mathbb{R}$.

2. ***a)*** $x^2 + 9 \geqslant 8x \Leftrightarrow x^2 - 8x + 9 \geqslant 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4\times1\times9 = 28 > 0$

Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-(-8)+\sqrt{28}}{2\times1} = 4 + \sqrt{7}$ et $\dfrac{-(-8)-\sqrt{28}}{2\times1} = 4 - \sqrt{7}$.

$x^2 - 8x + 9$ est du signe du coefficient dominant 1 , donc positif, à l'extérieur des racines,
donc : $\mathscr{S} =]-\infty\,;4-\sqrt{7}\,] \cup [\,4+\sqrt{7}\,;+\infty[$. → Racines comprises car on accepte que ce soit nul.

b) $\sqrt{2}\,x \geqslant x^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x^2 + \sqrt{2}\,x - \frac{1}{2} \geqslant 0$ → On pouvait aussi résoudre $x^2 - \sqrt{2}\,x + \frac{1}{2} \leqslant 0$.

$\Delta = (\sqrt{2}\,)^2 - 4\times(-1)\times(-\frac{1}{2}) = 0$

Donc, il y a une seule racine qui est $-\dfrac{\sqrt{2}}{2\times(-1)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$-x^2 + \sqrt{2}\,x - \frac{1}{2}$ est du signe du coefficient dominant -1 , donc négatif, à l'extérieur des racines, → Et donc positif nulle part mais nul en la racine.

donc : $\mathscr{S} = \{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\}$.

c) 1ère méthode : comme en 2de

$4x^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 \leqslant 0$
$\Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) \leqslant 0$

$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
signes de $2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
signes de $2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signes de $4x^2-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\mathscr{S} = [-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}]$.

2ème méthode : commencer comme en 2de et finir comme en 1ère

$4x^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 \leqslant 0$
$\Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) \leqslant 0$

Donc les racines sont $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

$4x^2 - 1$ est du signe du coefficient dominant 4 , donc positif, à l'extérieur des racines,
donc : $\mathscr{S} = [-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}]$.

3ème méthode : comme en 1ère

$4x^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 \leqslant 0$

$\Delta = 0^2 - 4\times4\times(-1) = 16 > 0$

Donc, il y a deux racines $\dfrac{-0+\sqrt{16}}{2\times4} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{-0-\sqrt{16}}{2\times4} = -\dfrac{1}{2}$.

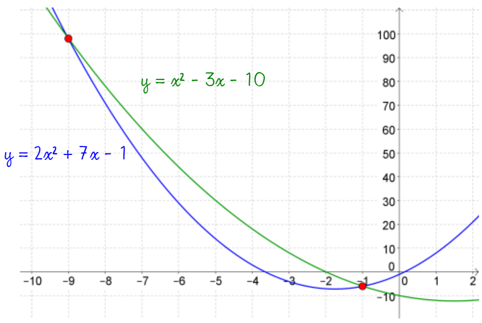
$4x^2 - 1$ est du signe du coefficient dominant 4 , donc positif, à l'extérieur des racines,
donc : $\mathscr{S} = [-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}]$.

d) $2x^2 + 7x - 1 > x^2 - 3x - 10 \Leftrightarrow x^2 + 10x + 9 > 0$

$\Delta = 10^2 - 4\times1\times9 = 64 > 0$

Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-10+\sqrt{64}}{2\times1} = -1$ et $\dfrac{-10-\sqrt{64}}{2\times1} = -9$.

$x^2 + 10x + 9$ est du signe du coefficient dominant 1 , donc positif, à l'extérieur des racines,
donc : $\mathscr{S} =]-\infty\,;-9[\, \cup\,]-1\,;+\infty[$.



e) $x^2 - 4 \leqslant (2x-1)^2$ → *On voit de belles identités remarquables, mais qui ne servent à rien…*

$\Leftrightarrow\ x^2 - 4 \leqslant 4x^2 - 4x + 1$

$\Leftrightarrow\ -3x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$

$\Delta = 4^2 - 4\times(-3)\times(-5) = -44 < 0$

Donc, il n'y a pas de racine.

$-3x^2 + 4x - 5$ est de signe constant, celui du coefficient dominant -3, donc négatif.

Donc : $\mathscr{S} = \mathbb{R}$.

f) *1ère méthode : comme en 2de*

$(x+5)^2 < (1-3x)^2 \Leftrightarrow (x+5)^2 - (1-3x)^2 < 0$
$\Leftrightarrow [(x+5)-(1-3x)][(x+5)+(1-3x)] < 0$
$\Leftrightarrow (4x+1)(-2x+6) < 0$

$4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$

$-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

x	$-\infty$		$-1/4$		3		$+\infty$
signes de $4x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
signes de $-2x+6$		$+$	|	$+$	0	$-$	
signes de $(x+5)^2-(1-3x)^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $\mathscr{S} =]-\infty ; -\frac{1}{4}[\cup]3 ; +\infty[$.

2ème méthode : commencer comme en 2de et finir comme en 1ère

$(x+5)^2 < (1-3x)^2 \Leftrightarrow (x+5)^2 - (1-3x)^2 < 0$
$\Leftrightarrow [(x+5)-(1-3x)][(x+5)+(1-3x)] < 0$
$\Leftrightarrow (4x+1)(-2x+6) < 0$

Donc les racines sont $-\frac{1}{4}$ et 3 .

$(4x+1)(-2x+6)$ est du signe du coefficient dominant $4\times(-2) = -8$, donc négatif, à l'extérieur des racines,

donc : $\mathscr{S} =]-\infty ; -\frac{1}{4}[\cup]3 ; +\infty[$.

3ème méthode : comme en 1ère

$(x+5)^2 < (1-3x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 < 1 - 6x + 9x^2$
$\Leftrightarrow -8x^2 + 16x + 24 < 0$

$\Delta = 16^2 - 4\times(-8)\times 24 = 1\,024 > 0$

Donc, il y a deux racines qui sont $\frac{-16+\sqrt{1\,024}}{2\times(-8)} = -1$ et $\frac{-16-\sqrt{1\,024}}{2\times(-8)} = 3$.

$-8x^2 + 16x + 24$ est du signe du coefficient dominant -8, donc négatif, à l'extérieur des racines,

donc : $\mathscr{S} =]-\infty ; -\frac{1}{4}[\cup]3 ; +\infty[$.

---

3. ***a)***

- Le discriminant de $x^2 - x - 30$ est $\Delta = (-1)^2 - 4\times1\times(-30) = 121 > 0$
  Donc, il y a deux racines qui sont $\frac{-(-1)+\sqrt{121}}{2\times1} = 6$ et $\frac{-(-1)-\sqrt{121}}{2\times1} = -5$.
  $x^2 - x - 30$ est du signe du coefficient dominant 1, donc positif, à l'extérieur des racines.
- $5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$

x	$-\infty$		-5		$-1/5$		6		$+\infty$
signes de x^2-x-30		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
signes de $5x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
signes du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\mathscr{S} =]-\infty ; -5] \cup [-\frac{1}{5} ; 6]$. → *Racines comprises…*

b) Le discriminant de $x^2 - 5x + 6$ est $\Delta = (-5)^2 - 4\times1\times6 = 1 > 0$

Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times1} = 3$ et $\dfrac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times1} = 2$.

$x^2 - 5x + 6$ est du signe du coefficient dominant 1 , donc positif, à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
signes de $3 - x$		+		+	0	–	
signes de $x^2 - 5x + 6$		+	0	–	0	+	
signes du produit		+	0	–	0	–	

→ Vu le niveau de cet exercice, si vous ne justifiez pas l'origine du 3 , on ne vous en voudra pas…

On remarque que les deux polynômes ont une racine en commun.

Donc : $\mathscr{S} = \,]-\infty\,;2\,] \cup \{\,3\,\}$.

→ Racines comprises…

c)

- Le discriminant de $x^2 - 9x - 10$ est $\Delta = (-9)^2 - 4\times1\times(-10) = 121 > 0$

  Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-(-9)+\sqrt{121}}{2\times1} = 10$ et $\dfrac{-(-9)-\sqrt{121}}{2\times1} = -1$.

  $x^2 - 9x - 10$ est du signe du coefficient dominant 1 , donc positif, à l'extérieur des racines.

Étant donnée la présence de deux trinômes et donc de deux discriminants, il vaut mieux préciser « Le discriminant de … »

- Le discriminant de $2x^2 - 14x + 20$ est $\Delta = (-14)^2 - 4\times2\times20 = 36 > 0$

  Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-(-14)+\sqrt{36}}{2\times2} = 5$ et $\dfrac{-(-14)-\sqrt{36}}{2\times2} = 2$.

  $2x^2 - 14x + 20$ est du signe du coefficient dominant 2 , donc positif, à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-1		2		5		10		$+\infty$
signes de $x^2 - 9x - 10$		+	0	–		–		–	0	+	
signes de $2x^2 - 14x + 20$		+		+	0	–	0	+		+	
signes du produit		+	0	–	0	+	0	–	0	+	

Donc : $\mathscr{S} = \,]-\infty\,;-1\,] \cup [\,2\,;5\,] \cup [\,10\,;+\infty\,[$.

d)

- Le discriminant de $-3x^2 - 23x + 8$ est $\Delta = (-23)^2 - 4\times(-3)\times8 = 625 > 0$

  Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-(-23)+\sqrt{625}}{2\times(-3)} = -8$ et $\dfrac{-(-23)-\sqrt{625}}{2\times(-3)} = \dfrac{1}{3}$.

  $-3x^2 - 23x + 8$ est du signe du coefficient dominant -3 , donc négatif, à l'extérieur des racines.

- Le discriminant de $x^2 - 2x + 2$ est $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times2 = -4 < 0$

  Donc, il n'y a pas de racine.

  $x^2 - 2x + 2$ est de signe constant, celui du coefficient dominant 1 , donc positif.

x	$-\infty$		-8		1/3		$+\infty$
signes de $-3x^2 - 23x + 8$		–	0	+	0	–	
signes de $x^2 - 2x + 2$		+		+		+	
signes du produit		–	0	+	0	–	

→ Cette ligne ne joue en fait aucun rôle, mais elle doit figurer dans le tableau.

Donc : $\mathscr{S} = \,]-8\,;\dfrac{1}{3}\,[$.

e)

- Le discriminant de $3x^2 + 135x - 750$ est $\Delta = 135^2 - 4\times3\times(-750) = 27\,225 > 0$

  Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-135+\sqrt{27\,225}}{2\times3} = 5$ et $\dfrac{-135-\sqrt{27\,225}}{2\times3} = -50$.

  $3x^2 + 135x - 750$ est du signe du coefficient dominant 3 , donc positif, à l'extérieur des racines.

- Le discriminant de $-2x^2 - 30x + 1400$ est $\Delta = (-30)^2 - 4\times(-2)\times1\,400 = 12\,100 > 0$

  Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-(-30)+\sqrt{12\,100}}{2\times(-2)} = -35$ et $\dfrac{-(-30)-\sqrt{12\,100}}{2\times(-2)} = 20$.

  $-2x^2 - 30x + 1400$ est du signe du coefficient dominant -2 , donc négatif, à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-50		-35		5		20		$+\infty$
signes de $3x^2 + 135x - 750$		+	0	–		–	0	+		+	
signes de $-2x^2 - 30x + 1400$		–		–	0	+		+	0	–	
signes du produit		–	0	+	0	–	0	+	0	–	

Donc : $\mathscr{S} = [\,-50\,;-35\,] \cup [\,5\,;20\,]$.

→ Racines comprises…

f) • Le discriminant de $-2x^2 + 8 - 16$ est $\Delta = 8^2 - 4\times(-2)\times(16) = -64 < 0$

Donc, il n'y a pas de racine.

$-2x^2 + 8 - 16$ est de signe constant, celui du coefficient dominant -2 , donc négatif.

• Le discriminant de $x^2 + 4\sqrt{3}\,x + 12$ est $\Delta = (4\sqrt{3}\,)^2 - 4\times1\times12 = 0$

Donc, il y a une racine qui est $-\dfrac{4\sqrt{3}}{2\times1} = -2\sqrt{3}$.

$x^2 + 4\sqrt{3}\,x + 12$ est du signe du coefficient dominant 1 , donc positif, à l'extérieur de la racine.

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$+\infty$
signes de $-2x^2 + 8 - 16$		$-$	|	$-$	
signes de $x^2 + 4\sqrt{3}\,x + 12$		$+$	0	$+$	
signes du produit		$-$	0	$-$	

→ *Cette ligne joue un rôle essentiel !*

Donc : $\mathscr{S} = \mathbb{R} \setminus \{ -2\sqrt{3} \}$.

---

4. ***a)*** • Le discriminant de $x^2 - 3x + 2$ est $\Delta = (-3)^2 - 4\times1\times2 = 1 > 0$

Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times1} = 2$ et $\dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times1} = 1$.

Donc, le domaine de résolubilité est $\mathbb{R} \setminus \{ 2 ; 1 \}$.

• $x^2 - 3x + 2$ est du signe du coefficient dominant 1 , donc positif, à l'extérieur des racines.

• Le discriminant de $x^2 - 2x - 3$ est $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times(-3) = 16 > 0$

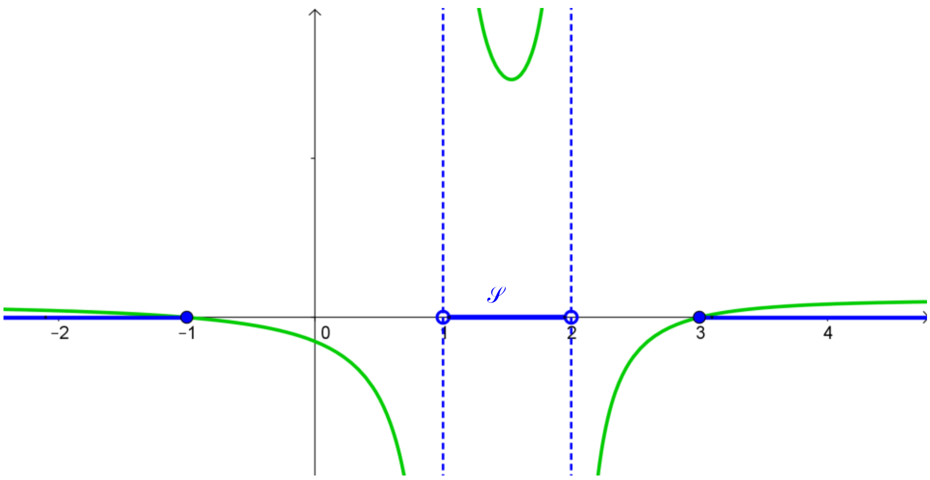
Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times1} = 3$ et $\dfrac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times1} = -1$.

$x^2 - 2x - 3$ est du signe du coefficient dominant 1 , donc positif, à l'extérieur des racines,

x	$-\infty$		-1		1		2		3		$+\infty$
signes de $x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
signes de $x^2 - 3x + 2$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
signes du quotient		$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	0	$+$	

Donc : $\mathscr{S} =]-\infty ; -1] \cup]1 ; 2[\cup [3 ; +\infty[$.

→ *Racines comprises, mais pas celles du dénominateur !*



b) • Le discriminant de $9x^2 - 6x - 6$ est $\Delta = (-6)^2 - 4\times9\times(-6) = 252 > 0$

Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-(-6)+\sqrt{252}}{2\times9} = \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$ et $\dfrac{-(-6)-\sqrt{252}}{2\times9} = \dfrac{1-\sqrt{7}}{3}$.

Donc, le domaine de résolubilité est $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{1+\sqrt{7}}{3} ; \dfrac{1-\sqrt{7}}{3} \right\}$.

• $9x^2 - 6x - 6$ est du signe du coefficient dominant 9 , donc positif, à l'extérieur des racines.

- Le discriminant de $x^2 - 4x - 1$ est $\Delta = (-4)^2 - 4\times1\times(-1) = 20 > 0$

  Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-(-4)+\sqrt{20}}{2\times1} = 2+\sqrt{5}$ et $\dfrac{-(-4)-\sqrt{20}}{2\times1} = 2-\sqrt{5}$.

  $x^2 - 4x - 1$ est du signe du coefficient dominant 1 , donc positif, à l'extérieur des racines.

- $\begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{7}}{3} = 1{,}21... \\ \dfrac{1-\sqrt{7}}{3} = -0{,}54... \end{cases}$ et $\begin{cases} 2+\sqrt{5} = 4{,}23... \\ 2-\sqrt{5} = -0{,}23... \end{cases}$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{7}}{3}$		$2-\sqrt{5}$		$\frac{1+\sqrt{7}}{3}$		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
signes de x^2-4x-1		+	|	+	0	−	|	−	0	+	
signes de $9x^2-6x-6$		+	0	−	|	−	0	+	|	+	
signes du quotient		+	‖	−	0	+	‖	−	0	+	

Donc : $\mathscr{S} = \left]\dfrac{1-\sqrt{7}}{3} ; 2-\sqrt{5}\right] \cup \left]\dfrac{1+\sqrt{7}}{3} ; 2+\sqrt{5}\right]$.

---

5. ***a)***

- $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

  $1-2x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

  Donc, le domaine de résolubilité $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; \frac{1}{2}\}$.

- $\dfrac{5}{x+2} > \dfrac{3}{1-2x}$

  $\Leftrightarrow \dfrac{5(1-2x)}{(x+2)(1-2x)} - \dfrac{3(x+2)}{(x+2)(1-2x)} > 0$

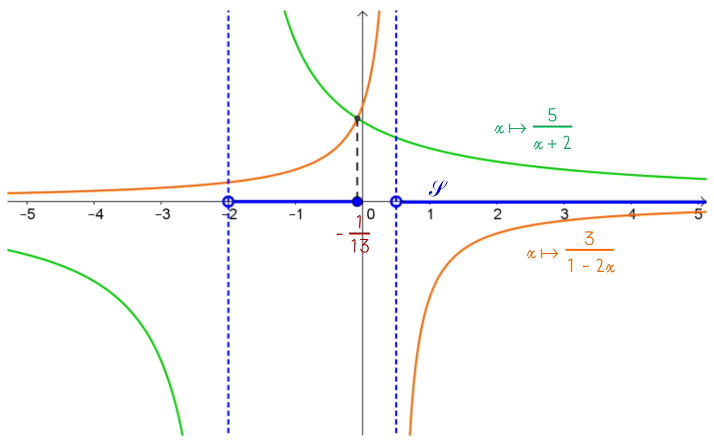
  $\Leftrightarrow \dfrac{5-10x-3x-6}{(x+2)(1-2x)} > 0$

  $\Leftrightarrow \dfrac{-13x-1}{(x+2)(1-2x)} > 0$ → Surtout, ne vous amusez pas à développer le dénominateur...

- $-13x-1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{13}$

x	$-\infty$		-2		$-1/13$		$1/2$		$+\infty$
signes de $-13x-1$		+	|	+	0	−	|	−	
signes de $x+2$		−	0	+	|	+	|	+	
signes de $1-2x$		+	|	+	|	+	0	−	
signes du quotient		−	‖	+	0	−	‖	+	

Donc : $\mathscr{S} = \left]-2 ; -\dfrac{1}{13}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$. → Vous avez remarqué qu'on n'a pas eu de discriminant !



b)

- $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

  $3x-7=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{3}$

  Donc, le domaine de résolubilité est $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2} ; \frac{7}{3}\}$.

- $\dfrac{x-3}{2x+1} \leqslant \dfrac{x+5}{3x-7}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-3)(3x-7)}{(2x+1)(3x-7)} - \dfrac{(x+5)(2x+1)}{(2x+1)(3x-7)} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(3x^2-7x-9x+21)-(2x^2+x+10x+5)}{(2x+1)(3x-7)} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-27x+16}{(2x+1)(3x-7)} \leqslant 0$

- Le discriminant de $x^2-27x+16$ est $\Delta = (-27)^2 - 4\times1\times16 = 665 > 0$

Donc, il y a deux racines qui sont $r_1 = \dfrac{-(-27)+\sqrt{665}}{2\times1} = \dfrac{27+\sqrt{665}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-(-27)-\sqrt{665}}{2\times1} = \dfrac{27-\sqrt{665}}{2}$.

x^2-4x-1 est du signe du coefficient dominant 1 , donc positif, à l'extérieur des racines.

Ici, ça vaut le coup de nommer les racines r_1 et r_2 pour éviter de les réécrire à chaque fois…

- $r_1 = 26{,}39...$ et $r_2 = 0{,}60...$

x	$-\infty$		$-1/2$		r_2		$7/3$		r_1		$+\infty$
signes de $x^2-27x+16$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
signes de $2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
signes de $3x-7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signes du quotient		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Donc : $\mathscr{S} = \left]-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{27-\sqrt{665}}{2}\right] \cup \left]\dfrac{7}{3} ; \dfrac{27+\sqrt{665}}{2}\right]$.

c)
- Le discriminant de x^2+x+1 est $\Delta = 1^2 - 4\times1\times1 = -3 < 0$
Donc, il n'y a pas de racine.
Donc, le domaine de résolubilité est $\mathbb{R}$.

- $\dfrac{3x^2-x-3}{x^2+x+1} \leqslant 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2-x-3}{x^2+x+1} - \dfrac{4(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2-x-3-4x^2-4x-4}{x^2+x+1} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x^2-5x-7}{x^2+x+1} \leqslant 0$

- Le discriminant de x^2+x+1 est négatif,
donc x^2+x+1 est de signe constant, celui du coefficient dominant 1 , donc positif.

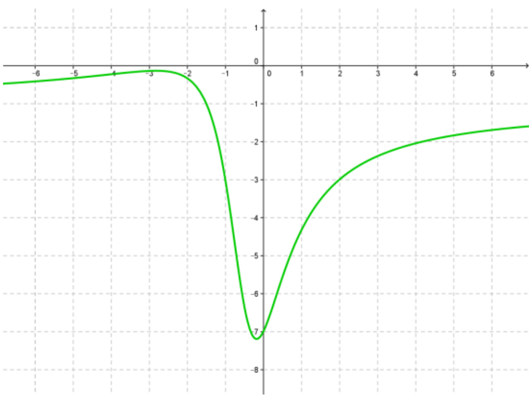
- Le discriminant de $-x^2-5x-7$ est $\Delta = (-5)^2 - 4\times(-1)\times(-7) = -3 < 0$
Donc, il n'y a pas de racine.
Donc, $-x^2-5x-7$ est de signe constant, celui du coefficient dominant -1 , donc négatif.

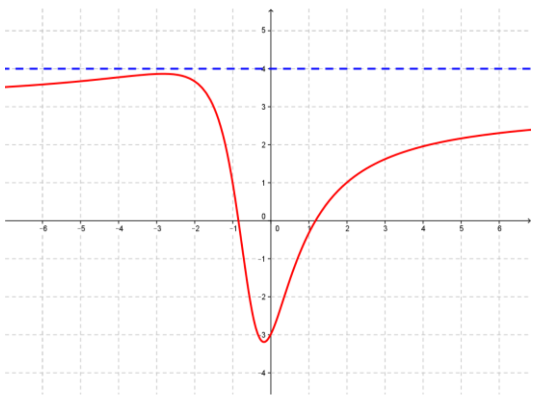
x	$-\infty$		$+\infty$
signes de $-x^2-5x-7$		$-$	
signes de x^2+x+1		$+$	
signes de $\dfrac{-x^2-5x-7}{x^2+x+1}$		$-$	

Donc : $\mathscr{S} = \mathbb{R}$.

On peut le vérifier graphiquement en traçant la fonction $x \mapsto \dfrac{-x^2-5x-7}{x^2+x+1}$ qui est bien toujours négative.

Ou encore en traçant la fonction $x \mapsto \dfrac{3x^2-x-3}{x^2+x+1}$ qui est bien toujours sous la droite $y = 4$.





d)
- $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$
  $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

  Donc, le domaine de résolubilité $\mathbb{R} \setminus \{ -2\ ;\ 3 \}$.

- $$\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x+2} \geqslant -1$$

  $$\Leftrightarrow \frac{2\,(x+2)}{(x-3)\,(x+2)} - \frac{3\,(x-3)}{(x-3)\,(x+2)} + \frac{(x-3)\,(x+2)}{(x-3)\,(x+2)} \geqslant 0$$

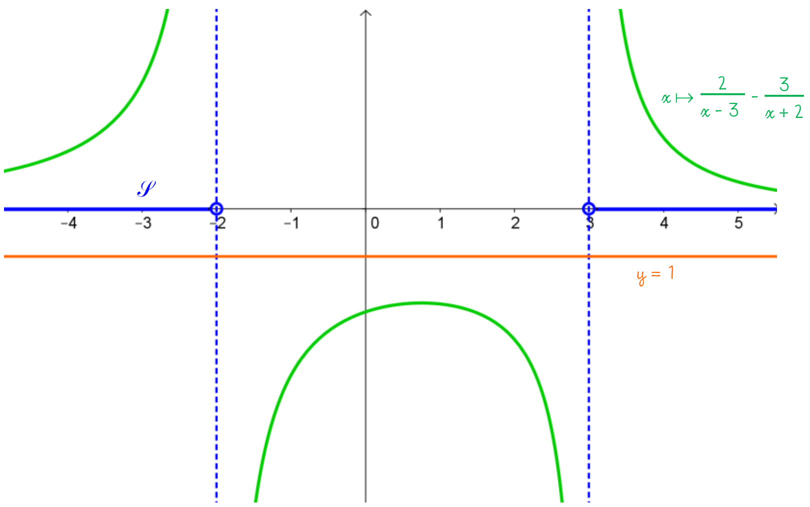
  $$\Leftrightarrow \frac{2x + 4 - 3x + 9 + x^2 + 2x - 3x - 6}{(x-3)\,(x+2)} \geqslant 0$$

  $$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 7}{(x-3)\,(x+2)} \geqslant 0$$

- Le discriminant de $x^2 - 2x + 7$ est $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times7 = -24 < 0$
  Donc, il n'y a pas de racine.
  Donc, $x^2 - 2x + 7$ est de signe constant, celui du coefficient dominant 1 , donc positif.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
signes de $x^2 - 2x + 7$		$+$		$+$		$+$	
signes de $x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
signes de $x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
signes du quotient		$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	

Donc : $\mathscr{S} = \,]-\infty\ ;\ -2\,[\ \cup\ ]\,3\ ;\ +\infty\,[$.



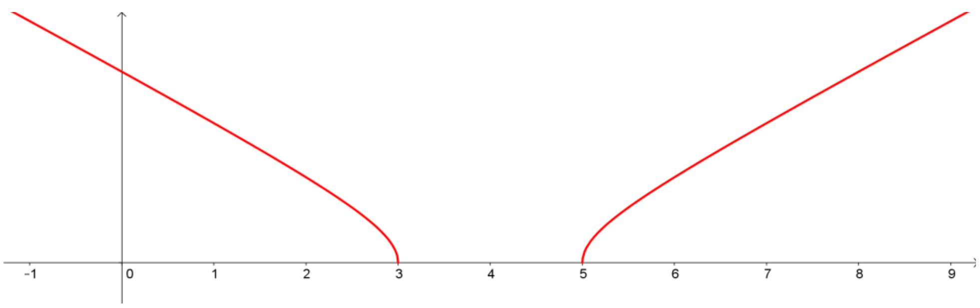
---

6. ***a)*** Le discriminant de $x^2 - 8x + 15$ est $\Delta = (-8)^2 - 4\times1\times15 = 4 > 0$.

Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-(-8) + \sqrt{4}}{2\times1} = 5$ et $\dfrac{-(-8) - \sqrt{4}}{2\times1} = 3$.

$x^2 - 8x + 15$ est du signe du coefficient dominant 1 , donc positif, à l'extérieur des racines.

On en déduit que le domaine de définition de f est $]-\infty\ ;\ 3\,] \cup [\,5\ ;\ +\infty\,[$.



b) Le discriminant de $-x^2 + 5x - 4$ est $\Delta = 5^2 - 4\times(-1)\times(-4) = 9 > 0$.

Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-5+\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 1$ et $\dfrac{-5-\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 4$.

$-x^2 + 5x - 4$ est du signe du coefficient dominant -1 , donc négatif, à l'extérieur des racines.

On en déduit que le domaine de définition de g est $]\,1\,;\,4\,[$.