Correction de SOS MATH 1ère S – PROBABILITÉS - Fiche 1

1. *a)*

Issue	$X = 50$	$X = 10$	$X = 0$
Probabilité	$\frac{1}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{24}{32}$

→ Toutes les sortes de points qu'on peut gagner, y compris 0 lorsqu'on ne gagne rien.
→ Les probabilités sont élémentaires : $\frac{\text{nombre de cartes favorables}}{\text{nombre total de cartes}}$.

- $E = \frac{1}{32}\times 50 + \frac{7}{32}\times 10 + \frac{24}{32}\times 0 = 3{,}75$.

→ Somme des produits de la probabilité par l'issue numérique.

Donc, l'espérance de X vaut 3,75 points. → Je conclus avec l'unité.
On peut alors considérer que, en moyenne, un joueur gagne 3,75 points par tirage.

- $\sigma = \sqrt{\frac{1}{32}\times(50 - 3{,}75)^2 + \frac{7}{32}\times(10 - 3{,}75)^2 + \frac{24}{32}\times(0 - 3{,}75)^2} \approx 9{,}27$.

→ On reconnaît la racine carrée de la variance.

Donc, l'écart type vaut environ 9,27 .

b)

2ème lancer / 1er lancer	pile	face
pile	**5**	**0**
face	**0**	**–2**

Tableau à double entrée très efficace pour deux épreuves.
On pouvait aussi faire un arbre pondéré.

Issue	$X = 5$	$X = 0$	$X = -2$
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

- $E = \frac{1}{4}\times 5 + \frac{2}{4}\times 0 + \frac{1}{4}\times(-2) = 0{,}75$.

Donc, l'espérance de X vaut 0,75 €.
On peut alors considérer que, en moyenne, un joueur gagne 0,75 € par partie.

- $\sigma = \sqrt{\frac{1}{4}\times(5 - 0{,}75)^2 + \frac{2}{4}\times(0 - 0{,}75)^2 + \frac{1}{4}\times(-2 - 0{,}75)^2} \approx 2{,}59$.

Donc, l'écart type vaut environ 2,59 .

c)

dé *B* / dé *A*	1	2	3	4	5	6
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
6	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

Chaque case contient la somme des deux dés.

Arbre pondéré trop lourd à cause du nombre de branches…

Issue	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$	$X = 6$	$X = 7$	$X = 8$	$X = 9$	$X = 10$	$X = 11$	$X = 12$
Probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

- $E = \frac{1}{36}\times 2 + \frac{2}{36}\times 3 + \frac{3}{36}\times 4 + \frac{4}{36}\times 5 + \frac{5}{36}\times 6 + \frac{6}{36}\times 7 + \frac{5}{36}\times 8 + \frac{4}{36}\times 9 + \frac{3}{36}\times 10 + \frac{2}{36}\times 11 + \frac{1}{36}\times 12 = 7$.

Donc, l'espérance de X vaut 7 . → Pas d'unité ici…
On peut alors considérer que, en moyenne, un joueur fait une somme de 7.

d)

dé *B* / dé *A*	1	2	3	4	5	6
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	**2**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
3	**3**	**3**	**3**	**4**	**5**	**6**
4	**4**	**4**	**4**	**4**	**5**	**6**
5	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**6**
6	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**

Chaque case contient la plus grande valeur des deux dés.

Issue	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$	$X = 6$
Probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

- $E = \frac{1}{36}\times 1 + \frac{3}{36}\times 2 + \frac{5}{36}\times 3 + \frac{7}{36}\times 4 + \frac{9}{36}\times 5 + \frac{11}{36}\times 6 = \frac{161}{36} \approx 4{,}47$.

Donc, l'espérance de X vaut $\frac{161}{36}$.
On peut alors considérer que, en moyenne, un joueur a une plus grande valeur d'environ 4,47.

e)

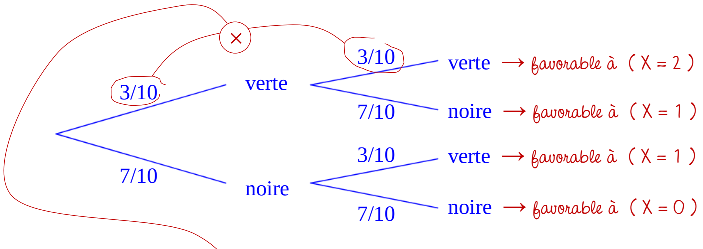


Tableau trop lourd à cause du nombre de boules…

Issue	$X = 2$	$X = 1$	$X = 0$
Probabilité	$\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$	$\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{42}{100}$	$\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{49}{100}$

→ On fait la somme des probabilités des issues favorables, et chaque probabilité est le produit des probabilités simples rencontrées sur les branches.

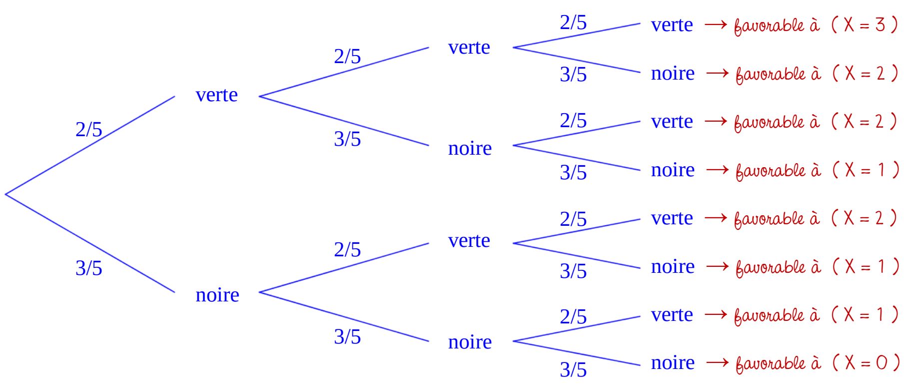
- $E=\frac{9}{100}\times 2+\frac{42}{100}\times 1+\frac{49}{100}\times 0=0{,}6$.

  Donc, l'espérance de X vaut 0,6 boule verte.
  On peut alors considérer que, en moyenne, un joueur pioche 0,6 boule verte par partie.

- $\sigma=\sqrt{\frac{9}{100}\times(2-0{,}6)^2+\frac{42}{100}\times(1-0{,}6)^2+\frac{49}{100}\times(0-0{,}6)^2}\approx 0{,}65$.

  Donc, l'écart type vaut environ 0,65 .

f)



- $P(X=3)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{125}$

  → Les calculs sont un peu trop lourds pour être mis dans le tableau…

  $P(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{36}{125}$

  $P(X=1)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{54}{125}$

  $P(X=0)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{27}{125}$

Issue	$X = 3$	$X = 2$	$X = 1$	$X = 0$
Probabilité	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

  → Un petit conseil : vérifiez que $\frac{8}{125}+\frac{36}{125}+\frac{54}{125}+\frac{27}{125}$ fait bien 1 …

- $E=\frac{8}{125}\times 3+\frac{36}{125}\times 2+\frac{54}{125}\times 1+\frac{27}{125}\times 0=1{,}2$.

  Donc, l'espérance de X vaut 1,2 boule verte.
  On peut alors considérer que, en moyenne, un joueur pioche 1,2 boule verte par partie.

g)

Issue	$X = 97{,}50$	$X = 7{,}50$	$X = -2{,}50$
Probabilité	$\frac{200}{12\,000}$	$\frac{1\,000}{12\,000}$	$\frac{12\,000-200-1\,000}{12\,000}=\frac{10\,800}{12\,000}$

  → N'oubliez pas d'enlever le prix du paquet !!!

- $E=\frac{200}{12\,000}\times 97{,}50+\frac{1\,000}{12\,000}\times 7{,}50+\frac{10\,800}{12\,000}\times(-2{,}50)=0$.

  Donc, l'espérance de X vaut 0 €.
  On peut alors considérer que, en moyenne, un client gagne 0 € par paquet acheté.

Remarque : Un tel jeu ne peut être autorisé par le tribunal de commerce qu'à la condition qu'il soit équitable, c'est-à-dire d'espérance nulle.

2. ***a)*** $X = 0$ est l'évènement « *On a pioché 0 boule verte.* »
Pour la première boule, on a 3 chances sur 5 de ne pas piocher une verte.
Pour la deuxième boule, on a 2 chances sur 4 de ne pas piocher une verte.

Donc $P(X=0) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$.

b) 1ère méthode : tableau à double entrée
Un peu long à faire mais très visuel : il suffit de compter les issues.

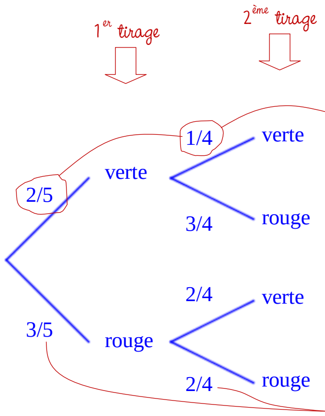
1er tirage \ 2ème tirage	V1	V2	R1	R2	R3
V1	-	**2**	**1**	**1**	**1**
V2	**2**	-	**1**	**1**	**1**
R1	**1**	**1**	-	**0**	**0**
R2	**1**	**1**	**0**	-	**0**
R3	**1**	**1**	**0**	**0**	-

Le tirage ***simultané de deux boules*** est équivalent à ***deux tirages successifs sans remise***.
La diagonale est vide car chaque boule ne peut être piochée deux fois.
Les cases contiennent l'issue observée : le nombre de boules vertes.

Le nombre total de couples est $5 \times 5 - 5 = 20$.

Issue	$X = 2$	$X = 1$	$X = 0$
Probabilité	$\frac{2}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{6}{20}$

2ème méthode : arbre pondéré



La probabilité de piocher deux vertes est le produit des probabilités rencontrées sur les branches : $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$.

Au premier tirage, le nombre total est 5, mais au deuxième, il n'est plus que de 4.

Issue	$X = 2$	$X = 1$	$X = 0$
Probabilité	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{5}$	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

c) $E = \frac{1}{10} \times 2 + \frac{3}{5} \times 1 + \frac{3}{10} \times 0 = 0{,}8$.

Donc, l'espérance de X vaut 0,8 boule verte.
On peut alors considérer que, en moyenne, un joueur obtient 0,8 boule verte par tirage.

d) $P(A) = P(X=0) + P(X=2)$
$= \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$.

3. ***a)*** 1ère méthode : tableau à double entrée

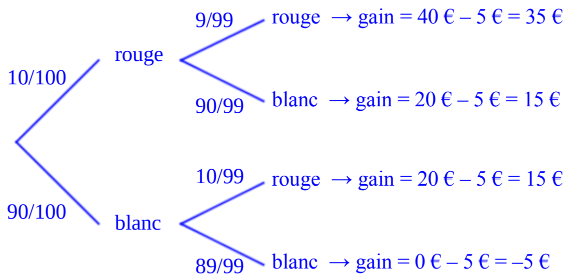
Fort peu pratique ici… Il y a trop d'issues pour montrer tous les jetons. Du coup, on ne voit pas bien la diagonale supprimée à cause du tirage sans remise.

2ème jeton / 1er jeton	10 rouges	90 blancs
10 rouges	$10\times10-10=90$ tirages pour un gain de 40 € $-$ 5 € $=35$ €	$10\times90=900$ tirages pour un gain de 20 € $-$ 5 € $=15$ €
90 blancs	$90\times10=900$ tirages pour un gain de 20 € $-$ 5 € $=15$ €	$90\times90-90=8\,010$ tirages pour un gain de 0 € $-$ 5 € $=-5$ €

Le nombre total de couples est $90+900+900+8\,010=9\,900$.

Issue	$X=35$	$X=15$	$X=-5$
Probabilité	$\dfrac{90}{9\,900}=\dfrac{1}{110}$	$\dfrac{900+900}{9\,900}=\dfrac{20}{110}$	$\dfrac{8\,010}{9\,900}=\dfrac{89}{110}$

2ème méthode : arbre pondéré



Issue	$X=35$	$X=15$	$X=-5$
Probabilité	$\dfrac{10}{100}\times\dfrac{9}{99}=\dfrac{1}{110}$	$\dfrac{10}{100}\times\dfrac{90}{99}+\dfrac{90}{100}\times\dfrac{10}{99}=\dfrac{20}{110}$	$\dfrac{90}{100}\times\dfrac{89}{99}=\dfrac{89}{110}$

b) $E=\dfrac{1}{110}\times35+\dfrac{20}{110}\times15+\dfrac{89}{110}\times(-5)=-1$.

Donc, l'espérance de X vaut -1 € .
On peut alors considérer que, en moyenne, un joueur perd 1 € par partie.

---

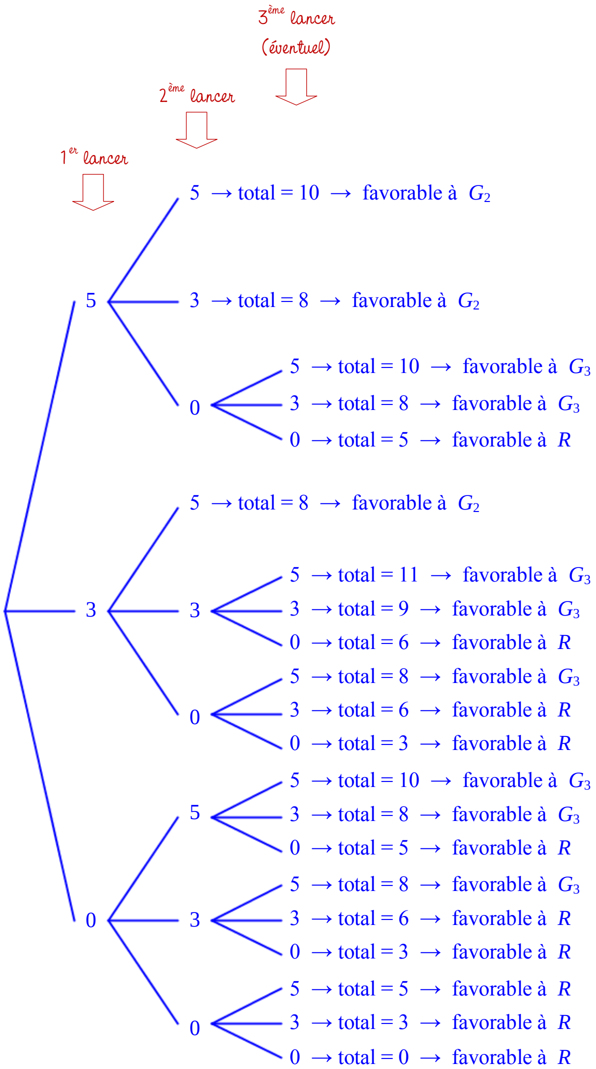
4. ***a)*** $\begin{cases} p_3=2p_5 \\ p_0=3p_5 \\ p_0+p_3+p_5=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} p_3=2p_5 \\ p_0=3p_5 \\ 3p_5+2p_5+p_5=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} p_3=2\times\dfrac{1}{6} \\ p_0=3\times\dfrac{1}{6} \\ p_5=\dfrac{1}{6} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} p_3=\dfrac{1}{3} \\ p_0=\dfrac{1}{2} \\ p_5=\dfrac{1}{6} \end{cases}$

b) **1)**



$P(G_2) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

2) G_2 , G_3 et R forment une partition de l'univers,

donc $P(G_2) + P(G_3) + P(R) = 1$

donc $P(R) = 1 - \frac{5}{36} - \frac{7}{36} = \frac{2}{3}$.

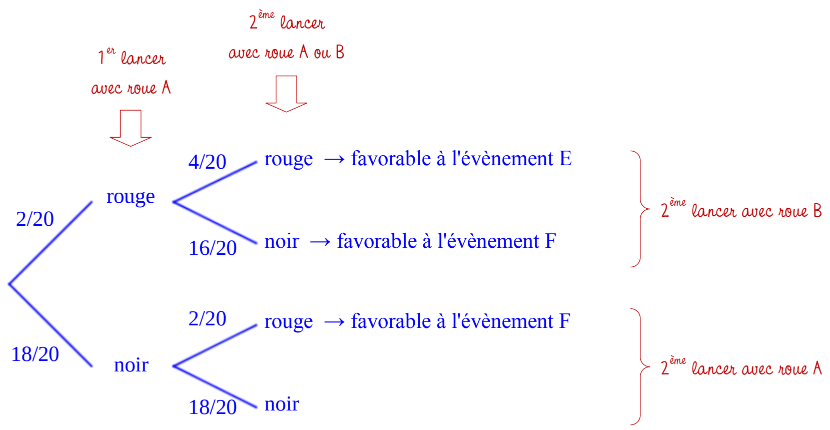
c) **1)**

Issue	$X = 3$	$X = 1$	$X = -2$
Probabilité	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{2}{3}$

2) $E = \frac{5}{36}\times 3 + \frac{7}{36}\times 1 + \frac{2}{3}\times(-2) = 0{,}5$.

Donc, l'espérance de X vaut 0,50 € .
Cette espérance étant positive, le jeu est favorable au joueur.

5. ***a)***



b) $P(\mathrm{E}) = \frac{2}{20}\times\frac{4}{20} = 0{,}02$

$P(\mathrm{F}) = \frac{2}{20}\times\frac{16}{20} + \frac{18}{20}\times\frac{2}{20} = 0{,}08 + 0{,}09 = 0{,}17$

c) **1)**

Issue	$X = 9$	$X = 1$	$X = -1$
Probabilité	0,02	0,17	$\frac{18}{20}\times\frac{18}{20} = 0{,}81$

2) $E = 0{,}02\times9 + 0{,}17\times1 + 0{,}81\times(-1) = -0{,}46$.

Donc, l'espérance de X vaut $-0{,}46$ € .

On peut alors considérer que, en moyenne, un joueur perd 0,46 € par partie.

---

6. ***a)*** **1)**

Issue	$X = 0$	$X = 110$
Probabilité	0,95	0,05

2) $E = 0{,}95\times0 + 0{,}05\times110 = 5{,}50$.

Donc, l'espérance de X vaut 5,50 € .
En fraudant, le voyageur dépense en moyenne 5,50 € par trajet au lieu de 10 € s'il payait son billet : la fraude est favorable.

3) $40 \times 5{,}50 = 220$.

Le voyageur fraudeur peut estimer dépenser 220 € par mois.

b) La loi de probabilité serait alors :

Issue	$X = 0$	$X = 110$
Probabilité	$1 - p$	p

$E = (\ 1 - p\ )\times0 + p\times110 = 110\,p$.

Pour que la fraude soit défavorable, il faut que :

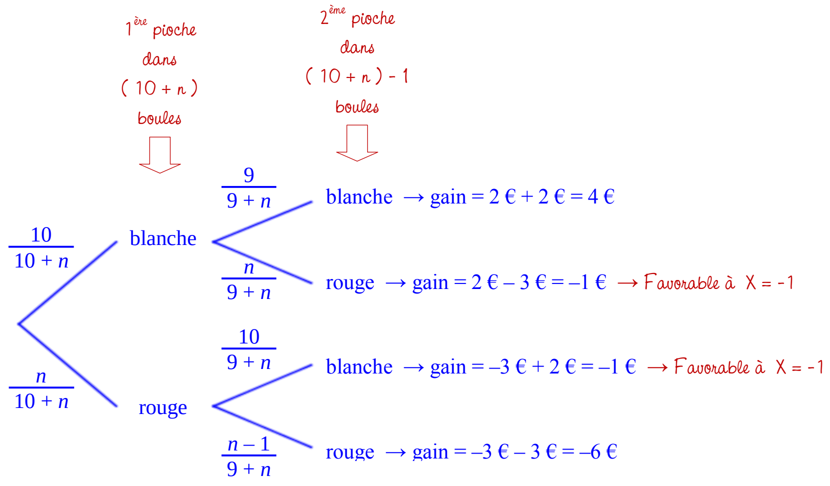
$110\,p > 10$

$\Leftrightarrow p > \frac{10}{110} = 0{,}0909...$

On doit donc avoir $p \geqslant 0{,}091$.

---

7. ***a)***



$X = -1$ est l'évènement « *On a pioché une boule blanche et une boule rouge, dans n'importe quel ordre.* »

Donc $P(X = -1) = \frac{10}{10+n} \times \frac{n}{9+n} + \frac{n}{10+n} \times \frac{10}{9+n}$

$= \frac{10n}{(10+n)(9+n)} + \frac{10n}{(10+n)(9+n)}$

$= \frac{20n}{(10+n)(9+n)}$

b) $P(X = 4) = \frac{10}{10+n} \times \frac{9}{9+n}$

$= \frac{90}{(10+n)(9+n)}$

$P(X = -6) = \frac{n}{10+n} \times \frac{n-1}{9+n}$

$= \frac{n^2 - n}{(10+n)(9+n)}$

c) $\mathrm{E}(X) = \frac{20n}{(10+n)(9+n)} \times (-1) + \frac{90}{(10+n)(9+n)} \times 4 + \frac{n^2-n}{(10+n)(9+n)} \times (-6)$

$= \frac{-20n}{(10+n)(9+n)} + \frac{360}{(10+n)(9+n)} + \frac{-6n^2+6n}{(10+n)(9+n)}$

$= \frac{-20n + 360 - 6n^2 + 6n}{(10+n)(9+n)}$

$= \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(10+n)(9+n)}$

d) Le jeu est équitable lorsque $\mathrm{E}(X) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(10+n)(9+n)} = 0$

$\Leftrightarrow -6n^2 - 14n + 360 = 0$

$\Delta = (-14)^2 - 4\times(-6)\times 360 = 8\,836 > 0$

donc l'équation possède deux solutions qui sont $\frac{-(-14) + \sqrt{8\,836}}{2\times(-6)} = -9$ et $\frac{-(-14) - \sqrt{8\,836}}{2\times(-6)} = \frac{20}{3}$.

n ne peut valoir -9 car un nombre de boules ne peut être négatif.
n ne peut valoir $\frac{20}{3}$ car un nombre de boules doit être entier.

Donc, le jeu ne peut être équitable.

e) Le jeu est favorable au joueur lorsque $\mathrm{E}(X) > 0$

$\Leftrightarrow \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(10+n)(9+n)} > 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} 10 + n > 0 \\ 9 + n > 0 \end{cases}$, donc le dénominateur $(10+n)(9+n)$ est toujours positif.

Donc, $\mathrm{E}(X)$ est du même signe que $-6n^2 - 14n + 360$.

Or, $-6n^2 - 14n + 360$ est du signe de son coefficient dominant -6 à l'extérieur de ses racines -9 et $\frac{20}{3}$.

On en déduit que :

$$\mathrm{E}(X) > 0 \Leftrightarrow n \in \left]-9 \,; \frac{20}{3}\right[$$
$$\Leftrightarrow 0 \leqslant n \leqslant 6$$