Correction de SOS MATH 1ère S – PRODUIT SCALAIRE - Fiche 1

1. ***a)*** On a les normes et l'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, on utilise la méthode 3 et sa formule « cosinus ».

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ → Qu'on peut écrire $AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

$= 5 \times 4{,}5 \times \cos 45°$

$= 22{,}5 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ → Utiliser la valeur exacte de $\cos 45°$.

$= \dfrac{45\sqrt{2}}{4}$

b) La présence d'un angle droit fait penser à la méthode 2 et sa formule « projeté ».

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ car D projeté orthogonal de C sur (AB)

$= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AD}\|$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ colinéaires de même sens → On peut écrire $AB \times AD$.

$= (16 + 9) \times 16$

$= 400$

c) Nous sommes dans un repère orthonormé, on pense à la méthode 5 et sa formule « coordonnées ».

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-1)\times2 + 3\times4$

$= -2 + 12$

$= 10$

d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$= 8 \times 10 \times \cos 135°$

$= 80 \times \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= -40\sqrt{2}$

e) C'est un des trois cas de base de la méthode 1.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires de même sens

$= 20 \times (20 + 15)$

$= 700$

f) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}$ car M projeté orthogonal de B sur (AC)

$= -\|\overrightarrow{AM}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|$ car $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires de sens contraires → On peut écrire $-AM \times AC$.

$= -3 \times 6$

$= -18$

---

2. ***a)*** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 2\times5 + 2\times(-1)$

$= 10 - 2$

$= 8$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ est positif

donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ est aigu.

b) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = 6\times(-1) + (-2)\times(-3)$

$= -6 + 6$

$= 0$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = 0$

donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux

donc (AD) et (CB) sont perpendiculaires.

---

3. ***a)***

- $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{RT} = \|\overrightarrow{RS}\| \times \|\overrightarrow{RT}\| \times \cos(\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT})$
$= 6 \times 6 \times \cos 30°$
$= 36 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$= 18\sqrt{3}$

- $\overrightarrow{RT}\cdot\overrightarrow{RU} = \|\overrightarrow{RT}\| \times \|\overrightarrow{RU}\| \times \cos(\overrightarrow{RT}, \overrightarrow{RU})$
$= 6 \times 6 \times \cos 45°$
$= 36 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$= 18\sqrt{2}$

b) $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{RU} = \|\overrightarrow{RS}\| \times \|\overrightarrow{RU}\| \times \cos(\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RU})$
$= 6 \times 6 \times \cos 75°$
$= 36 \times 0{,}258...$
$\approx 9{,}32$ arrondi au centième

c)

- $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{TR} = -\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{RT}$ → L'inversion des lettres T et R fait penser à la première propriété algébrique de la méthode 6 .
$= -18\sqrt{3}$

- $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{RS}\cdot(\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{RU})$ → Je pense à la troisième propriété algébrique de la méthode 6 .
$= \overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{RU}$ → Je développe et j'obtiens deux produits scalaires que je connais.
$= -18\sqrt{3} + 36 \times \cos 75°$ → Il est dangereux d'ajouter des arrondis : il vaut mieux écrire la somme des valeurs exactes, puis arrondir.
$\approx -21{,}86$ arrondi au centième

- $\overrightarrow{ST}\cdot\overrightarrow{RU} = (\overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RT})\cdot\overrightarrow{RU}$
$= \overrightarrow{SR}\cdot\overrightarrow{RU} + \overrightarrow{RT}\cdot\overrightarrow{RU}$
$= -\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{RU} + 18\sqrt{2}$
$= -36 \times \cos 75° + 18\sqrt{2}$
$\approx -16{,}14$ arrondi au centième

---

4. ***a)*** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ car B projeté orthogonal de C sur (AB)
$= \overrightarrow{AB}^{\,2}$ → On reconnait le carré scalaire.
$= \|\overrightarrow{AB}\|^2$
$= a^2$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC})\cdot(3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$

Produit entre nombre et vecteur

$= (2\overrightarrow{AB})\cdot(3\overrightarrow{AB}) - (2\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC} + (3\overrightarrow{AC})\cdot(3\overrightarrow{AB}) - (3\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}$
$= 2\times3\times(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}) - 2\times(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}) + 3\times3\times(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}) - 3\times(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC})$
$= 6a^2 - 2a^2 + 9a^2 - 3\times\overrightarrow{AC}^{\,2}$
$= 13a^2 - 3\times\|\overrightarrow{AC}\|^2$
$= 13a^2 - 3\times(a\sqrt{2})^2$
$= 13a^2 - 6a^2$
$= 7a^2$

Multiplication entre nombres

Produit entre vecteurs

5.

- $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = -\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{EG}$
$= -\dfrac{1}{2}(\|\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EG}\|^2 - \|\overrightarrow{FE}\|^2 - \|\overrightarrow{EG}\|^2)$
$= -\dfrac{1}{2}(\|\overrightarrow{FG}\|^2 - \|\overrightarrow{FE}\|^2 - \|\overrightarrow{EG}\|^2)$
$= -\dfrac{1}{2}(6^2 - 3^2 - 5^2)$
$= -1$

On doit reconnaître la situation classique du triangle quelconque dont on connaît les trois côtés.
La méthode 4 et sa formule « norme » s'impose mais avec une astuce à retenir : on inverse un vecteur pour pouvoir appliquer la relation de Chasles dans la somme.
Mais il ne faut pas oublier le signe $-$!

- $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG}$

$= -\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}\|^2 - \|\overrightarrow{EF}\|^2 - \|\overrightarrow{FG}\|^2)$

$= -\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{EG}\|^2 - \|\overrightarrow{EF}\|^2 - \|\overrightarrow{FG}\|^2)$

$= -\frac{1}{2}(5^2 - 3^2 - 6^2)$

$= 10$

- $\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{GE} = -\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{GE}$

$= -\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GE}\|^2 - \|\overrightarrow{FG}\|^2 - \|\overrightarrow{GE}\|^2)$

$= -\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{FE}\|^2 - \|\overrightarrow{FG}\|^2 - \|\overrightarrow{GE}\|^2)$

$= -\frac{1}{2}(3^2 - 6^2 - 5^2)$

$= 26$

---

6. **Partie A**

a)

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ car B projeté orthogonal de C sur (AB)

$= \overrightarrow{AB}^{\,2}$

$= \|\overrightarrow{AB}\|^2$

$= 40^2$

$= 1\ 600$

- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}$ car D projeté orthogonal de C sur (AD)

$= \overrightarrow{AD}^{\,2}$

$= \|\overrightarrow{AD}\|^2$

$= 30^2$

$= 900$

b)

- $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{DO}\| \times \|\overrightarrow{OB}\|$ car $\overrightarrow{DO}$ et $\overrightarrow{OB}$ colinéaires de même sens

$= \frac{1}{2}DB \times \frac{1}{2}DB$ car O milieu de $[DB]$

$= \frac{1}{4}DB^2$

$= \frac{1}{4}(AB^2 + AD^2)$ d'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADB rectangle en A

$= \frac{1}{4}(1\ 600 + 900)$

$= 625$

- $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CA} = -\|\overrightarrow{AO}\| \times \|\overrightarrow{CA}\|$ car $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{CA}$ colinéaires de sens contraires

$= -\frac{1}{2}AC \times AC$ car O milieu de $[AC]$

$= -\frac{1}{2}DB^2$ car les diagonales $[AC]$ et $[DB]$ du rectangle $ABCD$ sont isométriques

$= -\frac{1}{2}(1\ 600 + 900)$

$= -1\ 250$

- $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = -\|\overrightarrow{AF}\| \times \|\overrightarrow{BE}\|$ car $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$ colinéaires de sens contraires

$= -\frac{1}{4}AB \times \frac{1}{2}AB$ car E milieu de $[AB]$ et F milieu de $[AE]$

$= -\frac{1}{8}40^2$

$= -200$

c) E milieu de $[AB]$ et O milieu de $[AC]$
donc, d'après le théorème de la droite des milieux, (OE) et (BC) parallèles.

$$\begin{cases}(OE)\ //\ (BC)\\ (AB) \perp (BC)\end{cases} \Rightarrow (OE) \perp (AB)$$

Comme $E \in (AB)$, on en déduit que E projeté orthogonal de O sur (AB).

d)
- $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}$ car E projeté orthogonal de O sur (AB)
  $= \|\overrightarrow{AE}\|\times\|\overrightarrow{AB}\|$ car $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires de même sens
  $= 20\times40$
  $= 800$

- $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AF}$ car O milieu de $[AC] \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$
  $= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$ car E projeté orthogonal de O sur (AF)
  $= \|\overrightarrow{AE}\|\times\|\overrightarrow{AF}\|$ car $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ colinéaires de même sens
  $= 20\times10$
  $= 200$

e) $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}$ car $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$

$= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\|^2 - \|\overrightarrow{AO}\|^2 - \|\overrightarrow{OB}\|^2)$

$= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AO}\|^2 - \|\overrightarrow{OB}\|^2)$

$= \frac{1}{2}(40^2 - (\frac{\sqrt{1\,600 + 900}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{1\,600 + 900}}{2})^2)$

$= 175$

Il nous manque l'angle pour appliquer la formule « cosinus ». Mais une jolie astuce consiste à remplacer un vecteur par un autre pour avoir des vecteurs consécutifs et pouvoir appliquer la relation de Chasles dans la formule « norme ».

Partie B

a) On pose le repère orthonormé $(A ; \vec{i} ; \vec{j})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{40}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{30}\overrightarrow{AD}$.

On a alors :
- $A(0 ; 0)$.
- $\overrightarrow{AB} = 40\,\vec{i} + 0\,\vec{j} \Rightarrow B(40 ; 0)$.
- $\overrightarrow{AD} = 0\,\vec{i} + 30\,\vec{j} \Rightarrow D(0 ; 30)$.
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ car $ABCD$ rectangle
  $= 40\,\vec{i} + 30\,\vec{j} \Rightarrow C(40 ; 30)$.
- O milieu de $[AC] \Rightarrow O(\frac{0 + 40}{2} ; \frac{0 + 30}{2}) \Rightarrow O(20 ; 15)$.
- E milieu de $[AB] \Rightarrow E(\frac{0 + 40}{2} ; \frac{0 + 0}{2}) \Rightarrow E(20 ; 0)$.
- F milieu de $[AE] \Rightarrow F(\frac{0 + 20}{2} ; \frac{0 + 0}{2}) \Rightarrow F(10 ; 0)$.

b) On en déduit :
- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}40\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}40\\30\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 40\times40 + 0\times30 = 1\,600$
- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}40\\30\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\30\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = 40\times0 + 30\times30 = 900$
- $\overrightarrow{DO}\begin{pmatrix}20\\-15\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}20\\-15\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DO}.\overrightarrow{OB} = 20\times20 + (-15)\times(-15) = 625$
- $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}20\\15\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-40\\-30\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CA} = 20\times(-40) + 15\times(-30) = -1\,250$
- $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-20\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BE} = 10\times(-20) + 0\times0 = -200$
- $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}20\\15\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}40\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB} = 20\times40 + 15\times0 = 800$
- $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}20\\15\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AF} = 20\times10 + 15\times0 = 200$
- $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}20\\15\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}20\\-15\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB} = 20\times20 + 15\times(-15) = 175$

---

7. *a)* $(2\vec{u}).(\vec{u} + 3\vec{v}) = (2\vec{u}).\vec{u} + (2\vec{u}).(3\vec{v})$
$= 2\times(\vec{u}^{\,2}) + 2\times3\,(\vec{u}.\vec{v})$
$= 2\times\|\vec{u}\|^2 + 6\,(\vec{u}.\vec{v})$
$= 2\times5^2 + 6\times(-2)$
$= 38$

b) $(3\vec{u}+\vec{v}).(3\vec{u}-\vec{v}) = (3\vec{u})^2-\vec{v}^{\,2}$

$= 9\times(\vec{u}^{\,2})-\vec{v}^{\,2}$

$= 9\times\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|$

$= 9\times5^2-10^2$

$= 125$

---

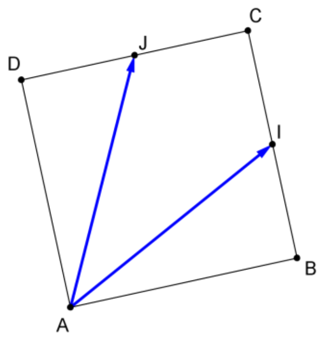
8. ***a)*** $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}).(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{DJ}$

Méthode de décomposition très classique en présence d'angles droits...
On se retrouve avec quatre produits scalaires, mais qui sont tous dans les positions de base (vecteurs orthogonaux ou colinéaires).

Or :

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ car $(AB)\perp(AD)$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DJ} = \|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{DJ}\|$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DJ}$ colinéaires de même sens
  $= x\times\frac{x}{2}$ car J milieu de $[CD]$
  $= \frac{x^2}{2}$
- $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{BI}\|\times\|\overrightarrow{AD}\|$ car $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{AD}$ colinéaires de même sens
  $= \frac{x}{2}\times x$ car I milieu de $[BC]$
  $= \frac{x^2}{2}$
- $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{DJ} = 0$ car $(BI)\perp(DJ)$.



On en déduit :

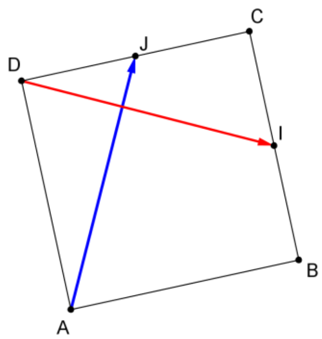
$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = \frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2} = x^2$$

b) $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{AJ} = (\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CI}).(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ})$

$= \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{DJ}$

Or :

- $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AD} = 0$ car $(DC)\perp(AD)$
- $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DJ} = \|\overrightarrow{DC}\|\times\|\overrightarrow{DJ}\|$ car $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DJ}$ colinéaires de même sens
  $= x\times\frac{x}{2}$ car J milieu de $[CD]$
  $= \frac{x^2}{2}$
- $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AD} = -\|\overrightarrow{CI}\|\times\|\overrightarrow{AD}\|$ car $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{AD}$ colinéaires de sens contraires
  $= -\frac{x}{2}\times x$ car I milieu de $[BC]$
  $= -\frac{x^2}{2}$
- $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{DJ} = 0$ car $(CI)\perp(DJ)$.



Donc : $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{AJ} = \frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2} = 0$

Et on en déduit que $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont orthogonaux, et donc (DI) et (AJ) sont perpendiculaires.

---

9. ***a)*** $\overrightarrow{MT}.\overrightarrow{SU} = (\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{ST}).\overrightarrow{SU}$

$= \overrightarrow{MS}.\overrightarrow{SU}+\overrightarrow{ST}.\overrightarrow{SU}$

Or :

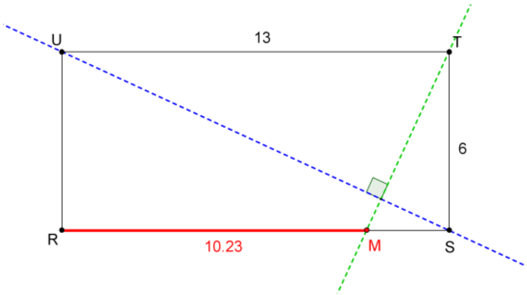
- $\overrightarrow{MS}.\overrightarrow{SU} = \overrightarrow{MS}.\overrightarrow{SR}$ car R projeté orthogonal de U sur (RS)
  $= -\|\overrightarrow{MS}\|\times\|\overrightarrow{SR}\|$ car $\overrightarrow{MS}$ et $\overrightarrow{SR}$ colinéaires de sens contraires
  $= -(13-x)\times13$
  $= -(13-x)\times13$

- $\overrightarrow{ST} . \overrightarrow{SU} = \overrightarrow{ST} . \overrightarrow{ST}$ car T projeté orthogonal de U sur (ST)

$$= \overrightarrow{ST}^{\,2}$$
$$= 6^2$$
$$= 36$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{MT} . \overrightarrow{SU} = -(13 - x) \times 13 + 36$$
$$= -169 + 13x + 36$$
$$= 13x - 133$$



Alors :

$(MT) \perp (SU) \Leftrightarrow \overrightarrow{MT}$ et $\overrightarrow{SU}$ orthogonaux

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MT} . \overrightarrow{SU} = 0$

$\Leftrightarrow 13x - 133 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{133}{13}$

Les droites (MT) et (SU) sont perpendiculaires si et seulement si x vaut $\dfrac{133}{13}$.

b) $\overrightarrow{MT} . \overrightarrow{MU} = (\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{ST}).(\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RU})$

$$= \overrightarrow{MS} . \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS} . \overrightarrow{RU} + \overrightarrow{ST} . \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{ST} . \overrightarrow{RU}$$

Or :

- $\overrightarrow{MS} . \overrightarrow{MR} = -\| \overrightarrow{MS} \| \times \| \overrightarrow{MR} \|$ car $\overrightarrow{MS}$ et $\overrightarrow{MR}$ colinéaires de sens contraires

$$= -(13 - x) \times x$$

- $\overrightarrow{MS} . \overrightarrow{RU} = 0$ car $(MS) \perp (RU)$

- $\overrightarrow{ST} . \overrightarrow{MR} = 0$ car $(ST) \perp (MR)$

- $\overrightarrow{ST} . \overrightarrow{RU} = \| \overrightarrow{ST} \| \times \| \overrightarrow{RU} \|$ car $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{RU}$ colinéaires de même sens

$$= 6 \times 6 = 36$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{MT} . \overrightarrow{MU} = -(13 - x) \times x + 36$$
$$= x^2 - 13x + 36$$

Alors :

$(MT) \perp (MU) \Leftrightarrow \overrightarrow{MT}$ et $\overrightarrow{MU}$ orthogonaux

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MT} . \overrightarrow{MU} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$

$\Delta = (-13)^2 - 4\times1\times36 = 25 > 0$

donc il y a deux solutions qui sont $\dfrac{-(-13) + \sqrt{25}}{2\times1} = 9$ et $\dfrac{-(-13) - \sqrt{25}}{2\times1} = 4$.

Les droites (MT) et (MU) sont perpendiculaires si et seulement si x vaut 9 ou 4.