Correction de SOS MATH 1ère S – PRODUIT SCALAIRE - Fiche 2

1. ***a)*** Nous sommes dans un repère orthonormé, on utilise la formule « coordonnées ».

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 3\times4 + 3\times2 = 18$.

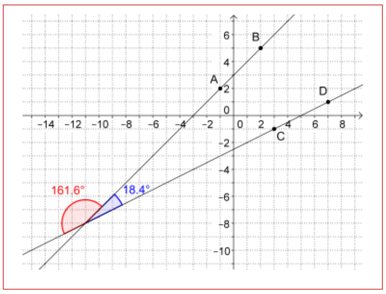
b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \Rightarrow AB = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$ → Penser à calculer les longueurs d'abord...

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB \times CD \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

$= 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{5} \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

$= 6\sqrt{10}\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$



c) $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 18\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 6\sqrt{10}\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\end{cases}$

$\Rightarrow 18 = 6\sqrt{10}\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{18}{6\sqrt{10}}$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \approx 18{,}4°$

On en déduit que les angles formés par les droites (AB) et (CD) valent environ 18,4° et 180° – 18,4° = 161 ,6° .

---

2. ***a)*** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2)$

$= \dfrac{1}{2}(\|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2)$

$= \dfrac{1}{2}(4^2 - 6^2 - 5^2)$

$= -22{,}5$

On en déduit que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = 22{,}5$.

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$

$= 6\times 5 \times \cos\widehat{BAC}$

$= 30\cos\widehat{BAC}$

c) $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 22{,}5\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 30\cos\widehat{BAC}\end{cases}$

$\Rightarrow 22{,}5 = 30\cos\widehat{BAC}$

$\Rightarrow \cos\widehat{BAC} = \dfrac{22{,}5}{30}$

$\Rightarrow \widehat{BAC} \approx 41{,}4°$

d) D'une part : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ → Pour articuler en une seule question « D'une part » et « D'autre part » sont pertinents...

$= -\dfrac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2)$

$= -\dfrac{1}{2}(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2)$

$= -\dfrac{1}{2}(5^2 - 6^2 - 4^2)$

$= 13{,}5$

D'autre part : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos\widehat{ABC}$

$= 6\times 4 \times \cos\widehat{ABC}$

$= 24\cos\widehat{ABC}$

Donc : $\begin{cases}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 13{,}5\\ \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 24\cos\widehat{ABC}\end{cases}$

$\Rightarrow 13{,}5 = 24\cos\widehat{ABC}$

$\Rightarrow \cos\widehat{ABC} = \dfrac{13{,}5}{24}$

$\Rightarrow \widehat{ABC} \approx 55{,}8°$

e) D'une part : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

$= -\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2)$

$= -\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2)$

$= -\frac{1}{2}(6^2 - 5^2 - 4^2)$

$= 2{,}5$

D'autre part : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos \widehat{ACB}$

$= 5 \times 4 \times \cos \widehat{ACB}$

$= 20 \cos \widehat{ACB}$

Donc $\begin{cases} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 2{,}5 \\ \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 20 \cos \widehat{ACB} \end{cases}$

$\Rightarrow\ 2{,}5 = 20 \cos \widehat{ACB}$

$\Rightarrow\ \cos \widehat{ACB} = \frac{2{,}5}{20}$

$\Rightarrow\ \widehat{ACB} \approx 82{,}8°$

Bien évidemment, on pouvait calculer $\widehat{ACB}$ par la soustraction $180° - 41{,}4° - 55{,}8°$ qui donne bien $82{,}8°$.

---

3. **a)** D'une part : $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IH}$ car H projeté orthogonal de K sur (IJ)

$= IJ \times IH$ car $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IH}$ colinéaires de même sens → Mériterait d'être justifié... Pas si facile...

$= 120\ IH$

D'autre part : $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = -\ \overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{IK}$

$= -\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IK}\|^2 - \|\overrightarrow{JI}\|^2 - \|\overrightarrow{IK}\|^2)$

$= -\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{JK}\|^2 - \|\overrightarrow{JI}\|^2 - \|\overrightarrow{IK}\|^2)$

$= -\frac{1}{2}(101^2 - 120^2 - 29^2)$

$= 2\,520$

Donc $\begin{cases} \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = 120\ IH \\ \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = 2\,520 \end{cases}$

$\Rightarrow\ 120\ IH = 2\,520$

$\Rightarrow\ IH = \frac{2\,520}{120} = 21$

b) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle IHK rectangle en H, on a $KH = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$.

On en déduit que l'aire de IJK vaut $\frac{120 \times 20}{2} = 1\,200$.

---

4. **a)** D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADH rectangle en H, on a $AH = \sqrt{5^2 - 4{,}8^2} = 1{,}4$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ car H projeté orthogonal de D sur (AB)

$= AB \times AH$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ colinéaires de même sens

$= 4{,}1 \times 1{,}4 = 5{,}74$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2)$

À retenir absolument... Pour une fois, ce n'est pas la relation de Chasles qui nous intéresse !

$= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2)$ car $ABCD$ parallélogramme

$= \frac{1}{2}(AC^2 - 4{,}1^2 - 5^2)$

$= \frac{1}{2}AC^2 - 20{,}905$

On en déduit :

$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 5{,}74 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}AC^2 - 20{,}905 \end{cases}$

$\Rightarrow\ 5{,}74 = \frac{1}{2}AC^2 - 20{,}905$

$\Rightarrow\ \frac{1}{2}AC^2 = 26{,}645$

$\Rightarrow\ AC^2 = 53{,}29$

$\Rightarrow\ AC = \sqrt{53{,}29}$ car AC positif

$\Rightarrow\ AC = 7{,}3$

---

5. D'une part : $\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{RT} = -\ \overrightarrow{SR}.\overrightarrow{RT}$

$$= -\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RT}\|^2 - \|\overrightarrow{SR}\|^2 - \|\overrightarrow{RT}\|^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{ST}\|^2 - \|\overrightarrow{SR}\|^2 - \|\overrightarrow{RT}\|^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(ST^2 - 9^2 - 6{,}5^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(ST^2 - 123{,}25\right)$$

D'autre part : $\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{RT} = RS \times RT \times \cos\widehat{R}$

$= 9\times 6{,}5 \times \cos 40°$

$= 58{,}5 \times \cos 40°$ → Attendre le dernier moment pour donner des arrondis.

Donc $\begin{cases} \overrightarrow{RS}.\overrightarrow{RT} = -\frac{1}{2}\left(ST^2 - 123{,}25\right) \\ \overrightarrow{RS}.\overrightarrow{RT} = 58{,}5 \times \cos 40° \end{cases}$

$\Rightarrow\ -\frac{1}{2}\left(ST^2 - 123{,}25\right) = 58{,}5 \times \cos 40°$

$\Rightarrow\ ST^2 = -2\,(58{,}5 \times \cos 40°) + 123{,}25$

$\Rightarrow\ ST = \sqrt{-2\,(58{,}5 \times \cos 40°) + 123{,}25}$ car ST positif

$\Rightarrow\ ST \approx 5{,}80$ arrondi à 10^{-2}

---

6. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 943 - 300 \\ 1\,166 - 400 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 643 \\ 766 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} 407 - 468 \\ 1\,616 - 912 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} -61 \\ 704 \end{pmatrix}$

Donc, d'une part : $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{ST} = 643\times(-61) + 766\times 704 = 500\,041$.

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 643 \\ 766 \end{pmatrix} \Rightarrow MN = \sqrt{643^2 + 766^2} = \sqrt{1\,000\,205}$

$\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} -61 \\ 704 \end{pmatrix} \Rightarrow ST = \sqrt{(-61)^2 + 704^2} = \sqrt{499\,337}$

Donc, d'autre part : $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{ST} = MN \times ST \times \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{ST})$

$= \sqrt{1\,000\,205} \times \sqrt{499\,337} \times \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{ST})$

On en déduit :

$\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{ST} = 500\,041 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{ST} = \sqrt{1\,000\,205} \times \sqrt{499\,337} \times \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{ST}) \end{cases}$

$\Rightarrow\ 500\,041 = \sqrt{1\,000\,205} \times \sqrt{499\,337} \times \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{ST})$

$\Rightarrow\ \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{ST}) = \dfrac{500\,041}{\sqrt{1\,000\,205} \times \sqrt{499\,337}}$

$\Rightarrow\ (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{ST}) \approx 45°$

On en déduit que les angles formés par les droites (MN) et (ST) valent environ $45°$ et $180° - 45° = 135°$.

---

7. D'une part : $\overrightarrow{XY}.\overrightarrow{XZ} = -\ \overrightarrow{YX}.\overrightarrow{XZ}$

$$= -\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{YX} + \overrightarrow{XZ}\|^2 - \|\overrightarrow{YX}\|^2 - \|\overrightarrow{XZ}\|^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{YZ}\|^2 - \|\overrightarrow{YX}\|^2 - \|\overrightarrow{XZ}\|^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(115^2 - 48^2 - 71^2\right)$$

$$= -2\,940$$

D'autre part : $\overrightarrow{XY}.\overrightarrow{XZ} = XY \times XZ \times \cos\widehat{YXZ}$

$= 48 \times 71 \times \cos\widehat{YXZ}$

$= 3\,408 \cos\widehat{YXZ}$

Donc $\begin{cases} \overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XZ} = -2\,940 \\ \overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XZ} = 3\,408 \cos \widehat{YXZ} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $-2\,940 = 3\,408 \cos \widehat{YXZ}$

$\Rightarrow$ $\cos \widehat{YXZ} = \dfrac{-2\,940}{3\,408}$

$\Rightarrow$ $\widehat{YXZ} \approx 149{,}6°$

---

8. Posons H le pied de la hauteur issue de N.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle KNH rectangle en H, on a $KH = \sqrt{7{,}3^2 - 5{,}5} = 4{,}8$.

D'une part : $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{KL}$ car H projeté orthogonal de N sur (KL)

$= KH \times KL$ car $\overrightarrow{KH}$ et $\overrightarrow{KL}$ colinéaires de même sens

$= 4{,}8 \times 25{,}2 = 120{,}96$

D'autre part : $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{KN} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KN}\|^2 - \|\overrightarrow{KL}\|^2 - \|\overrightarrow{KN}\|^2 \right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{KM}\|^2 - \|\overrightarrow{KL}\|^2 - \|\overrightarrow{KN}\|^2 \right)$ car $KLMN$ parallélogramme

$= \dfrac{1}{2}\left(KM^2 - 25{,}2^2 - 7{,}3^2 \right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(KM^2 - 688{,}33 \right)$

On en déduit :

$\begin{cases} \overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{KN} = 120{,}96 \\ \overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{KN} = \dfrac{1}{2}\left(KM^2 - 688{,}33 \right) \end{cases}$

$\Rightarrow$ $120{,}96 = \dfrac{1}{2}\left(KM^2 - 688{,}33 \right)$

$\Rightarrow$ $KM^2 = 2 \times 120{,}96 + 688{,}33$

$\Rightarrow$ $KM^2 = 930{,}25$

$\Rightarrow$ $KM = \sqrt{930{,}25}$ car KM positif

$\Rightarrow$ $KM = 30{,}5$

---

9. D'une part : $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos \hat{E}$

$= 10 \times EG \times \cos 60°$

$= 5\,EG$

D'autre part : $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = -\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{EG}$

$= -\dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EG}\|^2 - \|\overrightarrow{FE}\|^2 - \|\overrightarrow{EG}\|^2 \right)$

$= -\dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{FG}\|^2 - \|\overrightarrow{FE}\|^2 - \|\overrightarrow{EG}\|^2 \right)$

$= -\dfrac{1}{2}\left(9^2 - 10^2 - EG^2 \right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(19 + EG^2 \right)$

Donc $\begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = 5\,EG \\ \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = \dfrac{1}{2}\left(19 + EG^2 \right) \end{cases}$

$\Rightarrow$ $5\,EG = \dfrac{1}{2}\left(19 + EG^2 \right)$

$\Rightarrow$ $EG^2 - 10\,EG + 19 = 0$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 19 = 24 > 0$

Donc, $[EG]$ peut avoir deux longueurs qui sont $\dfrac{-(-10) + \sqrt{24}}{2 \times 1} = 5 + \sqrt{6} \approx 7{,}45$ et $\dfrac{-(-10) - \sqrt{24}}{2 \times 1} = 5 - \sqrt{6} \approx 2{,}55$.