Correction de SOS MATH 1ère S – PRODUIT SCALAIRE - Fiche 3

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (AB).

$M(x\,;y)\in(d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ orthogonaux
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$
$\Leftrightarrow (x+3)\times 6+(y-2)\times 2=0$
$\Leftrightarrow 6x+2y+14=0$ → Qu'on peut écrire $3x+y+7=0$ en simplifiant par 2 .

---

2. ***a)*** $(d): 2x-3y-5=0$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ vecteur directeur et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ vecteur normal à (d).

b) <u>1ère manière</u> :

$M(x\,;y)\in(\delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ orthogonaux
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$
$\Leftrightarrow (x-3)\times 3+(y+1)\times 2=0$
$\Leftrightarrow 3x+2y-7=0$

<u>2ème manière</u> :

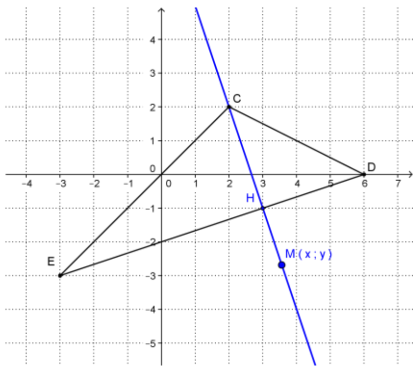
$M(x\,;y)\in(\delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ colinéaires
$\Leftrightarrow (x-3)\times(-3)-(y+1)\times 2=0$
$\Leftrightarrow -3x-2y+7=0$ → C'est bien sûr l'équation $3x+2y-7=0$ trouvée précédemment multipliée par -1 .

---

3. ***a)*** Soit H le pied de la hauteur issue de C. → Utile pour nommer la hauteur (CH) .

La hauteur dont on cherche l'équation est la droite passant par C et perpendiculaire à (ED) , de vecteur directeur $\overrightarrow{ED}$. On procède comme dans l'exercice 1. :

$M(x\,;y)\in(CH) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-2\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ orthogonaux
$\Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{ED}=0$
$\Leftrightarrow (x-2)\times 9+(y-2)\times 3=0$
$\Leftrightarrow 9x+3y-24=0$
$\Leftrightarrow 3x+y-8=0$ → On n'est pas obligé de simplifier...



b) Soit H' le pied de la hauteur issue de D.

$M(x\,;y)\in(DH') \Leftrightarrow \overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x-6\\y-0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ orthogonaux
$\Leftrightarrow \overrightarrow{DM}.\overrightarrow{EC}=0$
$\Leftrightarrow (x-6)\times 5+y\times 5=0$
$\Leftrightarrow 5x+5y-30=0$
$\Leftrightarrow x+y-6=0$ → On n'est pas obligé de simplifier...

Soit K l'orthocentre, donc point d'intersection des deux hauteurs (CH) et (DH').

$K(x\,;y)\in(CH)\cap(DH') \Leftrightarrow \begin{cases}3x+y-8=0\\x+y-6=0\end{cases}$ → Ah... c'était une bonne idée de simplifier !

$\Leftrightarrow \begin{cases}3x+6-x-8=0\\y=6-x\end{cases}$ → On pouvait aussi utiliser une soustraction des deux équations pour éliminer y .

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{2}{2}=1\\y=6-1=5\end{cases}$

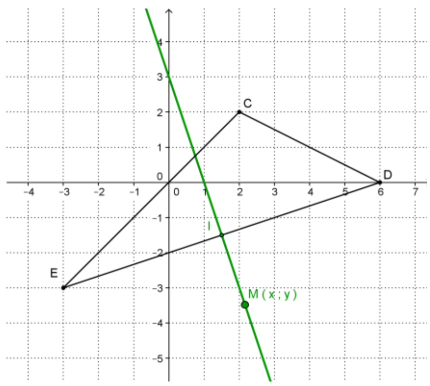
Donc, $K(1\,;5)$.

c) Soit I le milieu de $[DE]$, on a $I\left(\dfrac{6+(-3)}{2};\dfrac{0+(-3)}{2}\right)$ et donc $I(1{,}5\,;-1{,}5)$.

La médiatrice dont on cherche l'équation est la droite passant par I et perpendiculaire à (ED) , de vecteur directeur $\overrightarrow{ED}$.
On procède comme dans l'exercice 1. :

$M(x\,;y)$ est sur la médiatrice de $[DE]$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-1{,}5\\y+1{,}5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ orthogonaux
$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{ED}=0$
$\Leftrightarrow (x-1{,}5)\times 9+(y+1{,}5)\times 3=0$
$\Leftrightarrow 9x+3y-9=0$
$\Leftrightarrow 3x+y-3=0$ → On n'est pas obligé, mais...

On aurait peut-être dû nommer cette médiatrice...



La médiatrice de $[DE]$ a pour équation $3x+y-3=0$.

d) En utilisant la même méthode, on obtient :

La médiatrice de $[CD]$ a pour équation $2x - y - 7 = 0$.

Soit Ω le centre du cercle circonscrit, donc point d'intersection des deux médiatrices de $[DE]$ et de $[CD]$.

$\Omega\,(x\,;y)$ est sur la médiatrice de $[DE]$ et sur la médiatrice de $[CD]$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - 3 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ etc, etc...

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

Donc, $\Omega\,(2\,;-3)$.

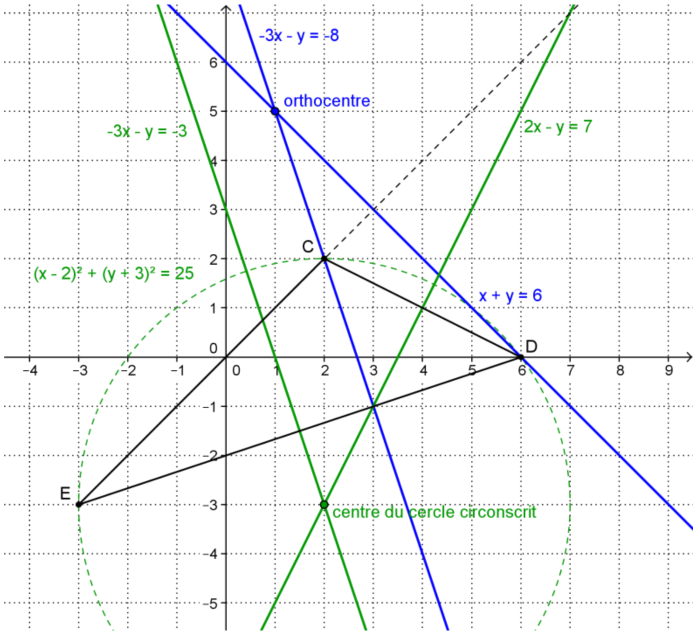
e) Posons $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit à CDE , son centre est $\Omega\,(2\,;-3)$. → Vous êtes d'accord qu'il vaut mieux perdre un peu de temps à nommer.

$M\,(x\,;y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \Omega M^2 = \Omega C^2$ → On pouvait utiliser $\Omega M^2 = \Omega D^2$, ou $\Omega M^2 = \Omega E^2$.

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = (2-2)^2 + (2+3)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 25$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + 6y - 12 = 0$



---

4. **e)** $M\,(x\,;y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{OM} = 0$

$\Leftrightarrow (x-6)(x-0) + (y-2)(y-0) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 2y = 0$

b) $M\,(x\,;y) \in \mathscr{C} \cap (d) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 - 6x + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$

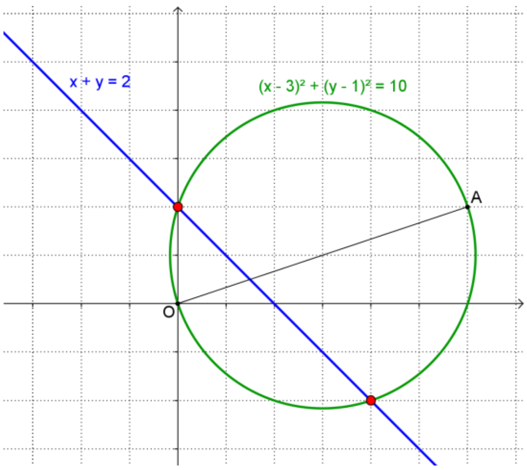
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 - 6x + (2-x)^2 - 2(2-x) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ 2x^2 - 8x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ 2x\,(x-4) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x = 0 \text{ ou } x = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 0 = 2 \\ x = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 2 - 4 = -2 \\ x = 4 \end{cases}$



Donc, les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et (d) ont pour coordonnées $(0\,;2)$ et $(4\,;-2)$.

---

5. ***a)*** En procédant comme dans l'exercice **3.** , on calcule les coordonnées du milieu de [AB] puis on obtient :

La médiatrice de $[AB]$ a pour équation $3x - 2y - 6{,}5 = 0$.

b) $M(x\,;y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-5) + (y-3)(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + y^2 - 4y + 13 = 0$

c) Soit $M(x\,;0)$ un point de l'axe des abscisses.

$M(x\,;0) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow x^2 - 7x + 0^2 - 4\times0 + 13 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 13 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4\times1\times13 = -3 < 0$

Donc cette équation n'admet pas de solution.

Donc, $\mathscr{C}$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

d) $2^2 - 7\times2 + 1^2 - 4\times1 + 13 = 4 - 14 + 1 - 4 + 13$

$= 0$

donc $H(2\,;1) \in \mathscr{C}$.

e) (T) est la droite passant par H et perpendiculaire au rayon $[IH]$ où I est le centre de $\mathscr{C}$. → I est le milieu de [AB] , dont on a eu besoin au **a)** .

$M(x\,;y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix}-1{,}5\\-1\end{pmatrix}$ orthogonaux

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{IH} = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\times(-1{,}5) + (y-1)\times(-1) = 0$

$\Leftrightarrow -1{,}5x - y + 4 = 0$