Correction de SOS MATH 1ère S - STATISTIQUES - Fiche 2

1. ***a)*** $\overline{m} = \dfrac{2+2+5+9+10+11}{6} = \dfrac{39}{6} = 6{,}5$ → *Je calcule la moyenne.*

Donc la moyenne vaut 6,5 .

$V = \dfrac{(2-6{,}5)^2 + (2-6{,}5)^2 + (5-6{,}5)^2 + (9-6{,}5)^2 + (10-6{,}5)^2 + (11-6{,}5)^2}{6}$ → *Je calcule la variance.*

$= \dfrac{20{,}25 + 20{,}25 + 2{,}25 + 6{,}25 + 12{,}25 + 20{,}25}{6}$

$\approx 13{,}5833$ → *J'arrondis à 10^{-4} pour avoir s à 10^{-2}.*

Donc la variance vaut environ 13,5833 .

$s = \sqrt{V}$
$\approx \sqrt{13{,}5833}$
$\approx 3{,}69$

Donc, l'écart type vaut environ 3,69 , arrondi au centième.

b) $\overline{m} = \dfrac{135+148+152+175+201}{5} = 162{,}2$

Donc la moyenne vaut 162,2 .

$V = \dfrac{(135-162{,}2)^2 + (148-162{,}2)^2 + (152-162{,}2)^2 + (175-162{,}2)^2 + (201-162{,}2)^2}{5}$

$= 542{,}96$

Donc la variance vaut 542,96 .

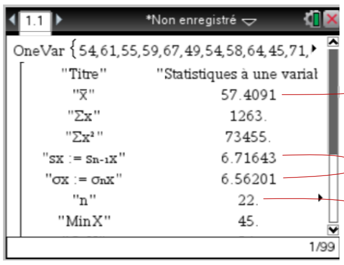
$s = \sqrt{V}$
$\approx \sqrt{542{,}96}$
$\approx 23{,}30$

Donc, l'écart type vaut environ 23,30 , arrondi au centième.

---

2. *Pas de détails de calculs demandés : on travaille avec la calculatrice !*

Pour l'athlète A, la moyenne des lancers est environ 57,4 m , arrondie à 10 cm près. → *Je n'oublie pas les unités...*
Son écart type est environ 6,60 m , arrondi à 10 cm près.



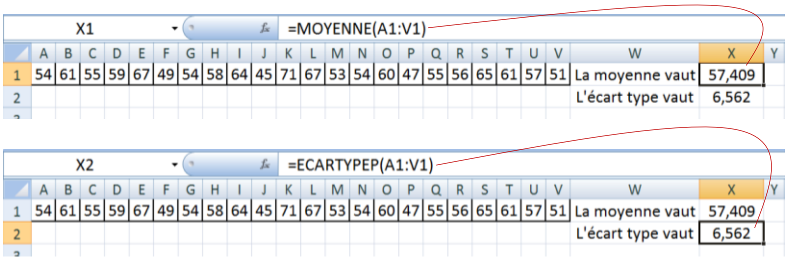
La moyenne.

L'écart type.

Attention, ce n'est pas celui-là !

Il est facile d'oublier une valeur dans ces longues listes...
Vérifiez que l'effectif total est le bon !

Méthode sur tableur



Pour l'athlète B, la moyenne des lancers est 57,3 m. → *Valeur exacte.*
Son écart type est environ 7,80 m , arrondi à 10 cm près.

On constate que les deux athlètes ont à peu près la même moyenne.
L'écart type de A est plus faible que celui de B, ce qui signifie que ses performances sont moins dispersées, qu'il est plus régulier.

Pour une prochaine compétition, il vaut mieux sélectionner B car ses performances étant plus dispersées, il a plus de chance de lancer très loin et donc d'être mieux placé.

---

3. *Pas de détails de calculs demandés : on travaille avec la calculatrice !*

En 2000, la moyenne des déchets générés était de 495,5 kg par habitant. → *Attention à l'unité... et pas de " environ ", c'est une valeur exacte.*
L'écart type était d'environ 120,6 kg par habitant, arrondi au dixième.

En 2008, la moyenne des déchets générés était d'environ 525,1 kg par habitant, arrondi au dixième.
L'écart type était d'environ 131,8 kg par habitant, arrondi au dixième.

On vous demande de commenter ou de comparer : la comparaison des écarts types doit traduire une différence de dispersion (« ... plus/moins dispersées... ») ou une différence de concentration (« ... plus/moins concentrées... »).

On constate que la moyenne a augmenté d'environ 30 kg par habitant en 8 ans.
De plus, l'écart type a aussi augmenté d'environ 11 kg par habitant.
La série de déchets en 2008 est donc plus dispersée.
Malheureusement, en observant le tableau, on voit que cette dispersion se fait vers les grandes valeurs, car le minimum de 254 (Slovaquie) en 2000 est passé à 306 (République Tchèque) en 2008.
Si certains pays ont un peu diminué leurs déchets, d'autres ont fortement augmenté, comme le Danemark qui produit près de 140 kg de plus par habitant.

---

4. ***a)*** *Détails de calculs demandés : on calcule la moyenne, puis la variance, puis l'écart type.*

$$\overline{m} = \frac{1\times3+2\times7+3\times11+4\times5+5\times2}{3+7+11+5+2} = \frac{80}{28} \approx 2{,}9$$

→ *On connaît le rôle des effectifs : ce sont les coefficients qui pondèrent la moyenne.*

Donc la moyenne vaut environ 2,9 , arrondie à 10^{-1} près.

$$V = \frac{3\times(1-2{,}9)^2+7\times(2-2{,}9)^2+11\times(3-2{,}9)^2+4\times(5-2{,}9)^2+2\times(1-2{,}9)^2}{3+7+11+5+2} = \frac{31{,}48}{28} \approx 1{,}1243$$

→ *Les effectifs sont de nouveau des coefficients.*

Donc la variance vaut environ 1,1243 .

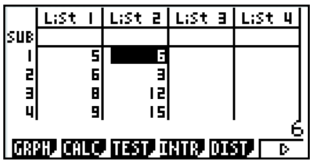
$$s = \sqrt{V} \approx \sqrt{1{,}1243} \approx 1{,}06$$

Donc, l'écart type vaut environ 1,06 , arrondi à 10^{-2} près.

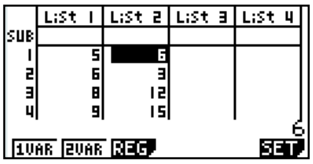
b) *Pas de détails de calculs demandés : on travaille avec la calculatrice.*
Il faut entrer deux listes : la liste des treize valeurs de 5 à 18, puis la liste des treize effectifs de 6 à 5.

Méthode pour CASIO

Entrez la liste des treize valeurs de 5 à 18 dans **List1** .
Entrez la liste des treize effectifs de 6 à 5 dans **List2** .

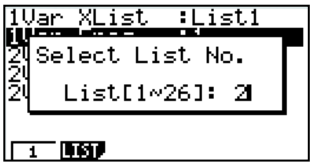


[F2] **Calc**
[F6] **SET**

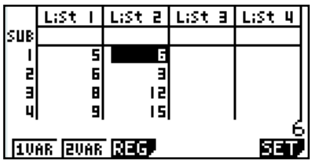


Descendez sur **1Var Freq** .

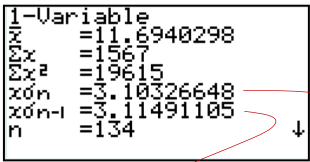
[F2] **List**
Puis entrez **2** .



On retrouve l'écran ci-dessus.



[F1] **1VAR** *donne :*

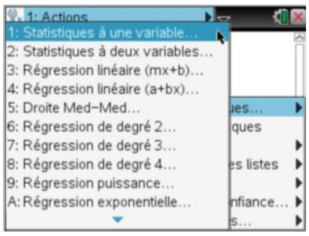


L'écart type.

Attention, ce n'est pas celui-là !

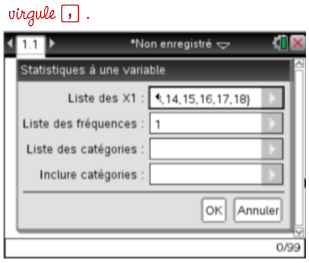
Méthode pour TI nSpire

[menu] 6: Statistiques
1: Calculs statistiques
1: Statistiques à une variable

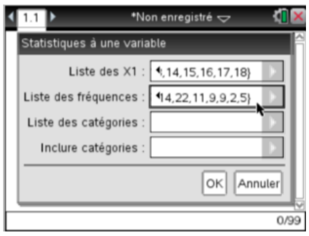


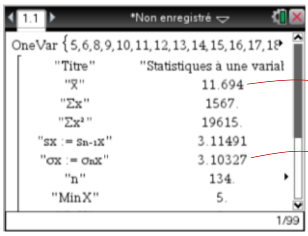
Nbre de listes : *entrez* 1 .

Liste des X1 : *entrez votre liste de valeurs entre accolades ([{}] au-dessus de [)]) et séparées par une virgule [,] .*



Liste des fréquences : entrez votre liste d'effectifs.





La moyenne des notes est environ 11,7 , arrondie à 10^{-1} près.

L'écart type de cette série est environ 3,1 , arrondi à 10^{-1} près.

Méthode pour tableur

Curieusement, les tableurs ne disposent pas de calculs automatisés de moyenne pondérée... et encore moins d'écart type pondéré !

Il faut utiliser les commandes :

=SOMME(plage) qui donne la somme des valeurs contenues dans la plage (pour le dénominateur),

=SOMMEPROD(plage1;plage2) qui donne la somme des produits de chaque valeur de la plage 1 par chaque valeur de la plage 2 (pour le numérateur).

Par exemple : =SOMMEPROD(A1:A3;B1:B3) calcule explicitement A1×B1 + A2×B2 + A3×B3 .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Valeurs	5	6	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18		La moyenne vaut	11,694
2	Effectifs	6	3	12	15	9	17	14	22	11	9	9	2	5		La variance vaut	9,6303
3																L'écart type vaut	3,1033
4	Ecarts quadratiques	44,81	32,42	13,65	7,258	2,87	0,482	0,094	1,706	5,317	10,93	18,54	28,15	39,77			

=(B2-Q1)^2 , c'est le premier écart quadratique.

valeur

moyenne, qu'il faut bloquer avec les $ pour tirer la cellule jusqu'en N4 .

=SOMMEPROD(B1:N1;B2:N2)/SOMME(B2:N2)

=SOMMEPROD(B4:N4;B2:N2)/SOMME(B2:N2)

=RACINE(Q2)

---

5. ***a)*** $\overline{m} = \dfrac{x_0}{1} = x_0$.

Donc la moyenne vaut x_0 .

$V = \dfrac{(x_0 - x_0)^2}{1} = 0$

Donc la variance vaut 0 .

$s = \sqrt{V} = \sqrt{0} = 0$

Donc, l'écart type est nul.

b) $\overline{m} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

Donc la moyenne vaut $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

$$V = \frac{\left(x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{2x_1 - x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2x_2 - x_1 - x_2}{2}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{\frac{(x_1 - x_2)^2}{4} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{4}}{2}$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)^2}{4}$$

→ L'astuce est de voir que $(x_1 - x_2)^2$ et $(x_2 - x_1)^2$ sont égaux, il y en a donc deux, ce qui simplifie de 2 en dénominateur.

Donc, la variance est bien le quart de l'écart quadratique entre les deux valeurs.

$$s = \sqrt{V}$$
$$= \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2}{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2}}{\sqrt{4}}$$
$$= \frac{|x_2 - x_1|}{2} \qquad \to \text{On applique } \sqrt{X^2} = |X| .$$
$$= \frac{x_2 - x_1}{2} \qquad \to x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow |x_2 - x_1| = x_2 - x_1 .$$

Donc, l'écart type est la moitié de l'écart entre les deux valeurs.

c) ***1)***

$$\overline{m} = \frac{x_1 + x_2 + \dfrac{x_1 + x_2}{2}}{3}$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{2x_1 + 2x_2 + x_1 + x_2}{2}$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{3x_1 + 3x_2}{2}$$
$$= \frac{x_1 + x_2}{2} = m$$

Donc la moyenne reste la même.

2) L'ajout de la moyenne comme troisième valeur provoque une plus grande concentration des valeurs :

On peut donc estimer que l'écart type va diminuer.

3) La nouvelle variance est :

$$\frac{(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + (x_3 - m)^2}{3}$$
$$= \frac{(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2}{3} \quad \text{car } x_3 = m$$
$$= \frac{2 \times \dfrac{(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2}{2}}{3} \qquad \to \text{Je divise par } 2 \text{ pour faire apparaître } V \text{ et je compense en multipliant par } 2 .$$
$$= \frac{2}{3} V$$

Le nouvel écart type est donc $\sqrt{\frac{2}{3} V} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{V} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, s$. $\qquad \to$ On peut faire l'effort d'écrire $\sqrt{\frac{2}{3}}$ sous la forme $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Il y a bien diminution car $\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}81... < 1$.

---

6. ***a)*** Chaque calcul sera présenté de deux manières : à gauche en montrant tous les termes des sommes, et à droite en utilisant le symbole Σ .

- *Calcul de la moyenne*

$$m' = \frac{(x_1 + b) + (x_2 + b) + (x_3 + b) + ... + (x_n + b)}{n}$$
$$= \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n + n \times b}{n}$$
$$= \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} + \frac{nb}{n}$$
$$= m + b$$

$$m' = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k + b)$$
$$= \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) + n \times b \right]$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{1}{n} \times n \times b \qquad \to \text{Je distribue } \frac{1}{n} .$$
$$= m + b$$

On en déduit que la nouvelle moyenne m' de cette série est $m + b$.

- *Calcul de la variance*

$$V' = \frac{((x_1 + b) - (m + b))^2 + ((x_2 + b) - (m + b))^2 + ... + ((x_n + b) - (m + b))^2}{n}$$
$$= \frac{(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + ... + (x_n - m)^2}{n}$$
$$= V$$

$$V' = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} ((x_k + b) - (m + b))^2$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2$$
$$= V$$

On en déduit que la nouvelle variance V' est égale à la variance initiale V .

- *Calcul de l'écart type*

  Puisque V' est égale à V, le nouvel écart type s' est égal à l'écart type initial s.

b)

- *Calcul de la moyenne*

$$\begin{aligned} m'' &= \frac{ax_1 + ax_2 + ax_3 + \dots + ax_n}{n} \\ &= \frac{a\,(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)}{n} \quad \rightarrow \text{Je factorise.} \\ &= a\,\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \\ &= am \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m'' &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ax_k \\ &= \frac{1}{n}\,(a\sum_{k=1}^{n} x_k) \quad \rightarrow \text{Je factorise, ce n'est pas facile à voir !...} \\ &= a\,(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k) \quad \rightarrow \text{Suivez bien l'échange entre } \frac{1}{n} \text{ et } a. \\ &= am \end{aligned}$$

On en déduit que la nouvelle moyenne m'' de cette série est am.

- *Calcul de la variance*

$$\begin{aligned} V'' &= \frac{(ax_1 - am)^2 + (ax_2 - am)^2 + \dots + (ax_n - am)^2}{n} \\ &= \frac{\big(a\,(x_1 - m)\big)^2 + \big(a\,(x_2 - m)\big)^2 + \dots + \big(a\,(x_n - m)\big)^2}{n} \quad \rightarrow \text{Je factorise } n \text{ fois par } a. \leftarrow \\ &= \frac{a^2\,(x_1 - m)^2 + a^2\,(x_2 - m)^2 + \dots + a^2\,(x_n - m)^2}{n} \quad \rightarrow \text{Je distribue } n \text{ fois le carré.} \leftarrow \\ &= a^2\,\frac{(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + \dots + (x_n - m)^2}{n} \quad \rightarrow \text{Je factorise par } a^2. \leftarrow \\ &= a^2\,V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V'' &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(ax_k - am)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(a\,(x_k - m)\big)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a^2\,(x_k - m)^2 \\ &= \frac{1}{n}\,\big(a^2\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2\big) \\ &= a^2\,\big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2\big) \\ &= a^2\,V \end{aligned}$$

On en déduit que la nouvelle variance V'' est égale à $a^2\,V$.

- *Calcul de l'écart type*

$$\begin{aligned} s'' &= \sqrt{V''} \\ &= \sqrt{a^2\,V} \\ &= |\,a\,|\sqrt{V} \\ &= as, \text{ car } a > 0 \end{aligned}$$

On en déduit que le nouvel écart type s'' est égal à as.

c)

- *Calcul de la moyenne*

$$\begin{aligned} m''' &= \frac{(ax_1 + b) + (ax_2 + b) + \dots + (ax_n + b)}{n} \\ &= \frac{(ax_1 + ax_2 + \dots + ax_n) + nb}{n} \\ &= \frac{a\,(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n} + \frac{nb}{n} \\ &= a\,\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + b \\ &= am + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m''' &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(ax_k + b) \\ &= \frac{1}{n}\,\big((\sum_{k=1}^{n} ax_k) + nb\big) \\ &= \frac{1}{n}\,\big((a\sum_{k=1}^{n} x_k) + nb\big) \\ &= \frac{1}{n}\,(a\sum_{k=1}^{n} x_k) + \frac{1}{n}\times nb \\ &= a\,(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k) + b \\ &= am + b \end{aligned}$$

On en déduit que la nouvelle moyenne m''' de cette série est $am + b$.

- *Calcul de la variance*

$$\begin{aligned} V''' &= \frac{\big((ax_1 + b) - (am + b)\big)^2 + \big((ax_2 + b) - (am + b)\big)^2 + \dots + \big((ax_n + b) - (am + b)\big)^2}{n} \\ &= \frac{(ax_1 + b - am - b)^2 + (ax_2 + b - am - b)^2 + \dots + (ax_n + b - am - b)^2}{n} \\ &= \frac{(ax_1 - am)^2 + (ax_2 - am)^2 + \dots + (ax_n - am)^2}{n} \\ &= a^2\,V \text{ d'après le } \textbf{b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V''' &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big((ax_k + b) - (am + b)\big)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(ax_k + b - am - b)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(ax_k - am)^2 \\ &= a^2\,V \text{ d'après le } \textbf{b)} \end{aligned}$$

On en déduit que la nouvelle variance V''' est égale à $a^2\,V$.

- *Calcul de l'écart type*

  D'après le ***b)***, on en déduit que le nouvel écart type s''' est égal à $a\sqrt{V}$.