Correction de SOS MATH 1ère S – SUITES - Fiche 1

1. On a une **suite récurrente** : on sait déjà qu'on pourra passer facilement d'un terme au suivant, mais qu'il sera plus difficile de calculer un terme connaissant son rang.

a) Le terme de rang 3 est u_3.

$u_1 = 2u_0 + 3 = 2\times(-2) + 3 = -1$ → Pour calculer u_3 à partir de la relation de récurrence, il faut calculer tous les termes précédents.

$u_2 = 2u_1 + 3 = 2\times(-1) + 3 = 1$

$u_3 = 2u_2 + 3 = 2\times1 + 3 = 5$

b) Le terme qui suit 8 189 est $2\times8\,189 + 3 = 16\,381$. → La relation de récurrence permet d'obtenir directement le terme suivant, sans avoir besoin du rang.

c) Le 6ème terme est le terme de rang 5, c'est u_5. → Attention au décalage à cause de u_0 qui est le 1er terme.

$u_4 = 2u_3 + 3 = 2\times5 + 3 = 13$
$u_5 = 2u_4 + 3 = 2\times13 + 3 = 29$

d) Le terme qui précède 1 021 est u_n tel que

$2u_n + 3 = 1\,021$ → Présentez sous forme d'équation, c'est élégant.

$\Leftrightarrow u_n = \dfrac{1\,021 - 3}{2} = 509$

e) Calculer u_{20} demanderait de calculer successivement tous les termes u_6, u_7, ... , jusqu'à u_{19}, ce qui fait dix fois le même calcul !

f) $u_n = 61 \Rightarrow u_{n+1} = 2\times61 + 3 = 125$

$\Rightarrow u_{n+2} = 2\times125 + 3 = 253$

g) $u_{n+1} = 2u_n + 3$

$\Rightarrow u_{n+2} = 2\,(\,2u_n + 3\,)$
$= 4u_n + 6$

---

2. On a une **suite définie explicitement** : on sait déjà qu'on pourra facilement calculer un terme connaissant son rang, mais qu'il sera plus difficile de passer d'un terme au suivant.

a) $v_2 = \dfrac{2}{2-1} + 3 = 5$ → Attention au premier rang ! C'est 2 car $n \geqslant 2$.

$v_3 = \dfrac{2}{3-1} + 3 = 4$

$v_4 = \dfrac{2}{4-1} + 3 = \dfrac{11}{3}$

b) $v_n = 3{,}2$ → Il faut d'abord trouver le rang de 3,2 .

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{n-1} + 3 = 3{,}2$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{n-1} = 0{,}2$

$\Leftrightarrow n - 1 = \dfrac{2}{0{,}2}$

$\Leftrightarrow n = 10 + 1 = 11$

Donc, 3,2 est le terme v_{11},

donc, le terme suivant est $v_{12} = \dfrac{2}{12-1} + 3 = \dfrac{35}{11}$.

c) $v_{101} = \dfrac{2}{101-1} + 3 = \dfrac{302}{100} = 3{,}02$ → Aucun problème…

d) Le 16ème terme est $v_{17} = \dfrac{2}{17-1} + 3 = 3{,}125$. → Le calcul du terme est facile à condition d'avoir trouvé le rang.

Pour cela, n'hésitez pas à écrire les premiers termes :

v_2 est le 1er terme,

v_3 est le 2ème terme,

⋮

on voit par analogie que v_{17} est le 16ème terme.

e) $v_{n+1} = \dfrac{2}{(\,n+1\,) - 1} + 3$ → Je remplace soigneusement n par $n+1$.

$= \dfrac{2}{n} + 3$

f) $u_{2k+1} = \dfrac{2}{(2k+1)-1} + 3$

$= \dfrac{1}{k} + 3$

101 est impair, il peut s'écrire $2\times50+1$.

Alors $v_{101} = v_{2\times50+1}$

$= \dfrac{1}{50} + 3 = \dfrac{151}{50} = 3{,}02$

---

3. $u_1 = \dfrac{3u_0}{1+2u_0} = \dfrac{3\times\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}$ → J'applique la relation de récurrence.

$u_2 = \dfrac{3u_1}{1+2u_1} = \dfrac{3\times\frac{3}{4}}{1+2\times\frac{3}{4}} = \dfrac{9}{10}$

---

4. Attention, on a une relation mixte : u_{n+1} est exprimé en fonction de u_n et de n.

a) $u_1 = \dfrac{1}{3}\times1+0-2 = -\dfrac{5}{3}$ → Ici, u_{n+1} est u_1, donc $\begin{cases} u_n \text{ est } u_0 \\ n \text{ vaut donc } 0. \end{cases}$

$u_2 = \dfrac{1}{3}\times(-\dfrac{5}{3})+1-2 = -\dfrac{14}{9}$ → Ici, u_{n+1} est u_2, donc $\begin{cases} u_n \text{ est } u_1 \\ n \text{ vaut donc } 1. \end{cases}$

$u_3 = \dfrac{1}{3}\times(-\dfrac{14}{9})+2-2 = -\dfrac{14}{27}$ → Ici, u_{n+1} est u_3, donc $\begin{cases} u_n \text{ est } u_2 \\ n \text{ vaut donc } 2. \end{cases}$

b) $v_0 = -2\times1+3\times0-\dfrac{21}{2} = -\dfrac{25}{2}$

$v_1 = -2\times(-\dfrac{5}{3})+3\times1-\dfrac{21}{2} = -\dfrac{25}{6}$

$v_2 = -2\times(-\dfrac{14}{9})+3\times2-\dfrac{21}{2} = -\dfrac{25}{18}$

$v_3 = -2\times(-\dfrac{14}{27})+3\times3-\dfrac{21}{2} = -\dfrac{25}{54}$ → C'est rigolo, tous les numérateurs sont des 25 ...

---

5. De nouveau une relation mixte...

$u_2 = \dfrac{2}{2\times1}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ → Ici, u_{n+1} est u_2, donc $\begin{cases} n+1 \text{ vaut } 2 \text{ (en numérateur)} \\ n \text{ vaut donc } 1 \text{ (en dénominateur)}. \end{cases}$

$u_3 = \dfrac{3}{2\times2}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$ → Ici, u_{n+1} est u_3, donc $\begin{cases} n+1 \text{ vaut } 3 \text{ (en numérateur)} \\ n \text{ vaut donc } 2 \text{ (en dénominateur)}. \end{cases}$

$u_4 = \dfrac{4}{2\times3}\times\dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{4}$ → Ici, u_{n+1} est u_4, donc $\begin{cases} n+1 \text{ vaut } 4 \text{ (en numérateur)} \\ n \text{ vaut donc } 3 \text{ (en dénominateur)}. \end{cases}$

---

6. *a)*

$$u_1 = \frac{2}{3}\times 2 + \frac{1}{3}\times 0 + 1 = \frac{7}{3} \approx 2{,}33$$

$$u_2 = \frac{2}{3}\times\frac{7}{3} + \frac{1}{3}\times 1 + 1 = \frac{26}{9} \approx 2{,}89$$

→ Avec l'arrondi, on obtient $\frac{2}{3}\times 2{,}33 + \frac{1}{3} + 1 \approx 2{,}89$ également, mais il vaut mieux utiliser la valeur exacte $\frac{7}{3}$.

$$u_3 = \frac{2}{3}\times\frac{26}{9} + \frac{1}{3}\times 2 + 1 = \frac{97}{27} \approx 3{,}59$$

$$u_4 = \frac{2}{3}\times\frac{97}{27} + \frac{1}{3}\times 3 + 1 = \frac{356}{81} \approx 4{,}40$$

b)

$$S_1 = u_0 + u_1 = 2 + \frac{7}{3} = \frac{13}{3}$$

$$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = \frac{13}{3} + \frac{26}{9} = \frac{65}{9}$$

→ Inutile de recalculer $u_0 + u_1$, c'est S_1 calculé juste au-dessus.

$$S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = \frac{65}{9} + \frac{97}{27} = \frac{292}{27}$$

→ Inutile de recalculer $u_0 + u_1 + u_2$, c'est S_2 calculé juste au-dessus... etc...

$$S_4 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{292}{27} + \frac{356}{81} = \frac{1\,232}{81}$$

$$T_1 = \frac{S_1}{1^2} = \frac{13}{3}$$

$$T_2 = \frac{S_2}{2^2} = \frac{\frac{65}{9}}{4} = \frac{65}{36}$$

$$T_3 = \frac{S_3}{3^2} = \frac{\frac{292}{27}}{9} = \frac{292}{243}$$

$$T_4 = \frac{S_4}{4^2} = \frac{\frac{1\,232}{81}}{16} = \frac{77}{81}$$

→ Bon... ce n'est pas très passionnant mais vous devez vous habituer à manipuler les suites dépendant d'autres suites.

---

7. *a)*

$$u_1 = \frac{2+2}{2\times 2+1} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$u_2 = \frac{\frac{4}{5}+2}{2\times\frac{4}{5}+1} = \frac{14}{13} \approx 1{,}08$$

$$u_3 = \frac{\frac{14}{13}+2}{2\times\frac{14}{13}+1} = \frac{40}{41} \approx 0{,}98$$

→ Attention, la proposition de valeurs approchées est un piège... il faut réutiliser la valeur exacte car $\frac{1{,}08+2}{2\times 1{,}08+1} \approx 0{,}97$.

$$u_4 = \frac{\frac{40}{41}+2}{2\times\frac{40}{41}+1} = \frac{122}{121} \approx 1{,}01$$

b) D'après la question ***a)*** :
u_0, u_2 et u_4 sont supérieurs à 1, donc, pour $n \in \{0\,;2\,;4\}$, $u_n - 1$ positif, donc du signe de $(-1)^0$, de $(-1)^2$ et de $(-1)^4$.
u_1 et u_3 sont inférieurs à 1, donc, pour $n \in \{1\,;3\}$, $u_n - 1$ négatif, donc du signe de $(-1)^1$ et de $(-1)^3$.

c) Pour tout entier naturel n :

→ Pensez à cette phrase d'introduction dès que vous travaillez dans le cas général.

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n+2}{2u_n+1} - 1 = \frac{u_n+2}{2u_n+1} - \frac{2u_n+1}{2u_n+1} = \frac{u_n+2-2u_n-1}{2u_n+1} = \frac{-u_n+1}{2u_n+1}$$

→ Attention aux signes.

d) Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}+1 = \frac{u_n+2}{2u_n+1}+1$$

$$= \frac{u_n+2}{2u_n+1}+\frac{2u_n+1}{2u_n+1}$$

$$= \frac{u_n+2+2u_n+1}{2u_n+1}$$ → Attention aux signes... Ah, non... pas là...

$$= \frac{3u_n+3}{2u_n+1}$$

e) Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}$$ → Je passe de v_{n+1} à u_{n+1} en remplaçant n par $n+1$ dans la formule $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n+1}$.

$$= \frac{\frac{-u_n+1}{2u_n+1}}{\frac{3u_n+3}{2u_n+1}}$$ d'après les questions ***c)*** et ***d)*** → Puis, je passe de u_{n+1} à u_n.

$$= \frac{-u_n+1}{\cancel{2u_n+1}}\times\frac{\cancel{2u_n+1}}{3u_n+3}$$ → Diviser revient à multiplier par l'inverse, puis je simplifie avec joie...

$$= \frac{-u_n+1}{3u_n+3}$$ → Quod erat demonstrandum...

Alors :

$$v_{n+1} = \frac{-(u_n-1)}{3(u_n+1)}$$ → Je factorise astucieusement par $-$ en haut et par 3 en bas.

$$= -\frac{1}{3}\frac{u_n-1}{u_n+1}$$

$$= -\frac{1}{3}v_n$$ → Enfin, je reviens à v_n !...

f) Pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$$

$\Leftrightarrow v_n(u_n+1) = u_n-1$ → Produit en croix.

$\Leftrightarrow v_n u_n + v_n = u_n - 1$ → Je développe dans l'idée de regrouper les u_n ...

$\Leftrightarrow v_n u_n - u_n = -1 - v_n$ → ... ce que je fais.

$\Leftrightarrow u_n(v_n-1) = -1-v_n$ → Je factorise u_n.

$\Leftrightarrow u_n = \frac{-1-v_n}{v_n-1}$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{-(1+v_n)}{-(1-v_n)}$ → Je factorise astucieusement par $-$ en haut et en bas.

$\Leftrightarrow u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$

---

8. **a)** $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}(-1) = \frac{3}{4}$$

b) $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1) = 1$$

c) Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+2}-\frac{1}{2}u_{n+1}$$ → Je remplace $\begin{cases} n \text{ par } n+1 \\ n+1 \text{ par } n+2 \end{cases}$ dans la formule $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

$$= u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2}u_{n+1}$$ → Je remplace u_{n+2} par $u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

$$= \frac{1}{2}u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n\right)$$

$$= \frac{1}{2}v_n$$

d) $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1$

e) Pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \Rightarrow u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$$

Donc :

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$$ → Je remplace n par $n+1$ dans la formule $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

$$= \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}$$ d'après ci-dessus et la question ***c)***

$$= \frac{v_n}{\frac{1}{2}v_n} + \frac{\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}$$ → Je décompose.

$$= 2 + \frac{u_n}{v_n}$$

$$= 2 + w_n$$

---

9. Pas de méthode éprouvée, il faut se débrouiller...

r_0 = reste de la division de $3^0 = 1$ par 7
$1 = 0\times7 + 1 \Rightarrow$ le quotient est 0 et le reste est 1 $\Rightarrow r_0 = 1$

r_1 = reste de la division de $3^1 = 3$ par 7
$3 = 0\times7 + 3 \Rightarrow$ le quotient est 0 et le reste est 3 $\Rightarrow r_1 = 3$

r_2 = reste de la division de $3^2 = 9$ par 7
$9 = 1\times7 + 2 \Rightarrow$ le quotient est 1 et le reste est 2 $\Rightarrow r_2 = 2$

r_3 = reste de la division de $3^3 = 27$ par 7
$27 = 3\times7 + 6 \Rightarrow$ le quotient est 3 et le reste est 6 $\Rightarrow r_3 = 6$

r_4 = reste de la division de $3^4 = 81$ par 7
$81 = 11\times7 + 4 \Rightarrow$ le quotient est 11 et le reste est 4 $\Rightarrow r_4 = 4$

r_5 = reste de la division de $3^5 = 243$ par 7
$243 = 34\times7 + 5 \Rightarrow$ le quotient est 34 et le reste est 5 $\Rightarrow r_5 = 5$

Petit rappel de 3ème :
À la calculatrice, on trouve 243 : 7 = 34,71...
Puis 243 - 34×7 = 1 .

r_6 = reste de la division de $3^6 = 729$ par 7
$729 = 104\times7 + 1 \Rightarrow$ le quotient est 104 et le reste est 1 $\Rightarrow r_6 = 1$

10.

$$\begin{cases} j_1 = 0{,}125\, j_0 + 0{,}525\, a_0 = 0{,}125\times200 + 0{,}525\times500 = 287{,}5 \approx 287 \\ a_1 = 0{,}625\, j_0 + 0{,}625\, a_0 = 0{,}625\times200 + 0{,}625\times500 = 437{,}5 \approx 437\ . \end{cases}$$

→ Attention à ne pas arrondir au plus proche, mais par défaut...

Donc, au bout d'un an d'observation, il y aura 287 jeunes et 437 adultes.

$$\begin{cases} j_2 = 0{,}125\, j_1 + 0{,}525\, a_1 = 0{,}125\times287{,}5 + 0{,}525\times437{,}5 = 265{,}625 \approx 265 \\ a_2 = 0{,}625\, j_1 + 0{,}625\, a_1 = 0{,}625\times287{,}5 + 0{,}625\times437{,}5 = 453{,}125 \approx 453\ . \end{cases}$$

Au bout de deux ans d'observation, il y aura 265 jeunes et 453 adultes.

11.

$$\begin{cases} a_1 = 0{,}7\, a_0 + 0{,}2\, b_0 + 60 = 0{,}7\times300 + 0{,}2\times300 + 60 = 330 \\ b_1 = 0{,}1\, a_0 + 0{,}6\, b_0 + 70 = 0{,}1\times300 + 0{,}6\times300 + 70 = 280 \end{cases}$$

Donc, en 2014, il y aura 330 abonnés à l'opérateur A et 280 abonnés à l'opérateur B.

$$\begin{cases} a_2 = 0{,}7\, a_1 + 0{,}2\, b_1 + 60 = 0{,}7\times330 + 0{,}2\times280 + 60 = 347 \\ b_2 = 0{,}1\, a_1 + 0{,}6\, b_1 + 70 = 0{,}1\times330 + 0{,}6\times280 + 70 = 271 \end{cases}$$

Donc, en 2015, il y aura 347 abonnés à l'opérateur A et 271 abonnés à l'opérateur B.

$$\begin{cases} a_3 = 0{,}7\, a_2 + 0{,}2\, b_2 + 60 = 0{,}7\times347 + 0{,}2\times271 + 60 = 357{,}1 \approx 357 \\ b_3 = 0{,}1\, a_2 + 0{,}6\, b_2 + 70 = 0{,}1\times347 + 0{,}6\times271 + 70 = 267{,}3 \approx 267 \end{cases}$$

Donc, en 2016, il y aura 357 abonnés à l'opérateur A et 267 abonnés à l'opérateur B.

12. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4} \\ &= \frac{4\,(\,2u_n + v_n\,) - 3\,(\,u_n + 3v_n\,)}{12} \\ &= \frac{8u_n + 4v_n - 3u_n - 9v_n}{12} \\ &= \frac{5u_n - 5v_n}{12} \\ &= \frac{5}{12}\,(\,u_n - v_n\,) \end{aligned}$$

---

13. À l'année $(\,2013 + n + 1\,)$:

v_{n+1} dénombre les habitants qui étaient en ville en $(\,2013 + n\,)$ et qui ne sont pas partis (il y en a $95\ \%$ de v_n) auxquels s'ajoutent les habitants qui étaient à la campagne en $(\,2013 + n\,)$ et qui sont arrivés (il y en a $1\ \%$ de c_n).

Donc : $v_{n+1} = 0{,}95\,v_n + 0{,}01\,c_n$.

c_{n+1} dénombre les habitants qui étaient à la campagne en $(\,2013 + n\,)$ et qui ne sont pas partis (il y en a $99\ \%$ de c_n) auxquels s'ajoutent les habitants qui étaient en ville en $(\,2013 + n\,)$ et qui sont arrivés (il y en a $5\ \%$ de v_n).

Donc : $c_{n+1} = 0{,}99\,c_n + 0{,}05\,v_n$.
