Correction de SOS MATH 1ère S – SUITES - Fiche 4

1. ***a)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6 - 2n$, → On reconnait que u_n est fonction affine de n, c'est terminé !

donc (u_n) arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 6$.

Autre méthode :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 6 - 2(n+1) = 6 - 2n - 2 = u_n - 2$

donc (u_n) arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 6 - 2\times 0 = 6$.

Autre méthode :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = [6 - 2(n+1)] - (6 - 2n) = 6 - 2n - 2 - 6 + 2n = -2$ → Résultat plus simple mais calculs plus lourds.

donc (u_n) arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 6 - 2\times 0 = 6$.

b) $\begin{cases} v_1 - v_0 = (1-2) - 2 = -3 \\ v_2 - v_1 = (1 - (-1)) - (-1) = 3 \end{cases}$

donc $v_{n+1} - v_n$ n'est pas constant,
donc (v_n) n'est pas arithmétique.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{1+2n}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2n}{2} = \dfrac{1}{2} + n$,

donc (w_n) arithmétique de raison 1 et de premier terme $w_0 = \dfrac{1}{2}$.

d) $\begin{cases} a_1 - a_0 = (3\times 1 - 1^2) - (3\times 0 - 0^2) = 2 \\ a_2 - a_1 = (3\times 2 - 2^2) - (3\times 1 - 1^2) = -4 \end{cases}$

donc $a_{n+1} - a_n$ n'est pas constant,
donc (a_n) n'est pas arithmétique.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n - 2{,}5$
donc (U_n) arithmétique de raison $-2{,}5$ et de premier terme $U_0 = -50$.

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_{n+1} = \frac{(n+1)^2 - (n+1) - 2}{(n+1)+1} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n - 1 - 2}{n+2} = \frac{n^2 + n - 2}{n+2}$$

→ Mauvaise nouvelle... on a bien du mal à "voir" le terme b_n là-dedans...

Donc :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n^2 + n - 2}{n+2} - \frac{n^2 - n - 2}{n+1}$$

→ On change de méthode !

$$= \frac{(n^2 + n - 2)(n+1) - (n^2 - n - 2)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{(n+2)(n+1)}$$

→ Numérateur fort peu agréable à factoriser...

$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n + 2}$$

→ Et bien, développons le dénominateur pour voir... Oh...

$$= 1$$

Donc (b_n) arithmétique de raison 1 et de premier terme $b_0 = \dfrac{0^2 - 0 - 2}{0+1} = -2$.

Autre (très jolie) méthode :

Le discriminant de $n^2 - n - 2$ est $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times(-2) = 9 > 0$

donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-(-1) + \sqrt{9}}{2\times 1} = 2$ et $\dfrac{-(-1) - \sqrt{9}}{2\times 1} = -1$.

Comme le coefficient dominant est 1, on en déduit la factorisation $n^2 - n - 2 = (n-2)(n+1)$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \dfrac{(n-2)\cancel{(n+1)}}{\cancel{n+1}} = n - 2$,

donc (b_n) arithmétique de raison 1 et de premier terme $b_0 = -2$.

2. *a)* Si on pose r la raison, on a :

$$\begin{cases} u_2 = u_0 + 2r \\ u_8 = u_0 + 8r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + 2r = 9 \\ u_0 + 8r = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6r = 42 \\ u_0 = 9 - 2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 7 \\ u_0 = 9 - 2\times7 = -5 \end{cases}$$

donc (u_n) arithmétique de raison 7 et de premier terme $u_0 = -5$,
donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -5 + 7n$.

On en déduit $\begin{cases} u_{100} = -5 + 7\times100 = 695 \\ u_{101} = u_{100} + 7 = 695 + 7 = 702 \text{ .} \end{cases}$

b) En utilisant la même méthode, on obtient :

$v_{50} = 600$.

c) En utilisant la même méthode, on obtient :

$w_{55} = 161$.

---

3. *a)* (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3 ,
donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 + 3n$.

Alors :

$u_n > 1\,000$

$\Leftrightarrow 2 + 3n > 1\,000$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{1\,000 - 2}{3}$

$\Leftrightarrow n > 332{,}6...$

$\Leftrightarrow n \geqslant 333$ → Attention, cette équivalence n'est pas valable dans $\mathbb{R}$!
Mais un entier supérieur à 332,6... , c'est pareil qu'un entier supérieur ou égal à 333 .

Le terme u_n dépasse $1\,000$ à partir du rang 333 . → On peut vérifier : $u_{332} = 2 + 3\text{x}332 = 998$ et $u_{333} = 998 + 3 = 1\,001$.

b) (v_n) arithmétique de premier terme $v_0 = 550$ et de raison $-0{,}2$,
donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 550 - 0{,}2n$.

Alors :

$v_n < 0$ → Je traduis la condition voulue par une inéquation.

$\Leftrightarrow 550 - 0{,}2n < 0$

$\Leftrightarrow -0{,}2n < -550$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{-550}{-0{,}2}$ → Attention au changement de sens...

$\Leftrightarrow n > 2\,750$

$\Leftrightarrow n \geqslant 2\,751$

Le terme v_n est négatif à partir du rang $2\,751$. → On peut vérifier : $v_{2\,750} = 550 - 0{,}2\text{x}2\,750 = 0$ et $v_{2\,751} = 0 - 0{,}2 = -0{,}2$.

c) (W_n) arithmétique de premier terme $W_0 = \dfrac{1}{6}$ et de raison $\dfrac{1}{3}$,

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \dfrac{1}{6} + \dfrac{n}{3}$.

Alors :

$W_n > 10$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{6} + \dfrac{n}{3} > 10$

$\Leftrightarrow \dfrac{1 + 2n}{6} > 10$

$\Leftrightarrow 1 + 2n > 60$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{60 - 1}{2}$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{59}{2}$

$\Leftrightarrow n \geqslant 30$

Le terme W_n dépasse 10 à partir du rang 30 .

---

4. ***a)*** Le premier terme est $c_0 = 100$.
Chaque année, le montant du capital augmente de 5 % de $100 = 5$, donc la raison est 5 .

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = 100 + 5n$.

Alors :

$$\begin{aligned} & c_n = 2\times 100 \\ \Leftrightarrow\ & 100 + 5n = 200 \\ \Leftrightarrow\ & n = \frac{200-100}{5} \\ \Leftrightarrow\ & n = 20 \end{aligned}$$

Donc, son capital aura doublé au bout de 20 ans.

b) Le premier terme est $U_0 = 10\,000$.
Chaque année, le montant du capital augmente de 1,5 % de $10\,000 = 150$, donc la raison est 150 .

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 10\,000 + 150n$.

Alors :

$$\begin{aligned} & U_n > 12\,500 \\ \Leftrightarrow\ & 10\,000 + 150n > 12\,500 \\ \Leftrightarrow\ & n > \frac{12\,500 - 10\,000}{150} \\ \Leftrightarrow\ & n > \frac{50}{3} \\ \Leftrightarrow\ & n \geqslant 17 \end{aligned}$$

Donc, le capital dépassera 12 500 euros au bout de 17 ans.

---

5. ***a)*** 1°) L'ongle pousse de 0,1 mm par jour,
donc $t_{n+1} = t_n + 0{,}1$
donc (t_n) arithmétique de raison $0{,}1$ et de premier terme $t_0 = 3$.

2°) (t_n) arithmétique de raison $0{,}1$ et de premier terme $t_0 = 3$,
donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 3 + 0{,}1n$.

Alors, $t_{10} = 3 + 0{,}1\times 10 = 4$.

Cela signifie que l'ongle mesurera 4 mm dix jours après avoir mesuré 3 mm, donc 17 jours après l'accident.

3°)
$$\begin{aligned} & t_n = 14 \\ \Leftrightarrow\ & 3 + 0{,}1\,n = 14 \\ \Leftrightarrow\ & n = \frac{14-3}{0{,}1} \\ \Leftrightarrow\ & n = 110 \end{aligned}$$

$110 + 7 = 117$,
donc, son ongle mesurera à nouveau sa taille normale de 1,4 cm au bout de 117 jours après l'acident.

---

6. ***a)*** On reconnaît les termes consécutifs d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 100$ et de raison 7 .

Le dernier terme est $u_n = 800$.
Or, on peut écrire $u_n = u_0 + 7n$.
On en déduit $800 = 100 + 7n \Leftrightarrow n = \dfrac{800-100}{7} = 100$.

Nous avons le premier et le dernier terme, mais il nous manque le nombre de termes.
Nous allons l'obtenir en trouvant le rang de 800 .

Donc $800 = u_{100}$.
On en déduit que le nombre de termes est 101 . → Attention au décalage de 1 à cause du premier rang 0 ...

Donc, la somme vaut $101 \times \dfrac{100+800}{2} = 45\,000$.

b) On reconnaît les termes consécutifs d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

Le dernier terme est $u_n = 10$.

Or, on peut écrire $u_n = u_0 + \dfrac{n}{2}$.

On en déduit $10 = 1 + \dfrac{n}{2} \Leftrightarrow n = 2\,(\,10 - 1\,) = 18$.

Donc $10 = u_{18}$.
On en déduit que le nombre de termes est 19 .

Donc, la somme vaut $19 \times \dfrac{1+10}{2} = \dfrac{209}{2} = 104{,}5$.

c) Posons la suite arithmétique (u_n) .

Nous avons le premier terme et le nombre de termes, mais il nous manque le dernier terme. Nous allons l'obtenir grâce à son rang 799 .

Le premier terme est $u_0 = 1{,}5$.
Le nombre de termes est 800 .

Le dernier terme est $u_{799} = u_0 + 799 \times 0{,}001$
$= 1{,}5 + 0{,}799$
$= 2{,}299$.

Donc, la somme vaut $800 \times \dfrac{1{,}5 + 2{,}299}{2} = 1\,519{,}6$.

d) On reconnaît les termes consécutifs d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 100$ et de raison -3 .

Le dernier terme est $u_n = -50$.
Or, on peut écrire $u_n = u_0 - 3n$.

On en déduit $-50 = 100 - 3n \Leftrightarrow n = \dfrac{-50 - 100}{-3} = 50$.

Donc $-50 = u_{50}$.
On en déduit que le nombre de termes est 51 .

Donc, la somme vaut $51 \times \dfrac{100 + (-50)}{2} = 1\,275$.

---

7. ***a)*** Si on pose P_n le prix de vente du $n^{\text{ème}}$ plant <u>supplémentaire</u> acheté, on a $P_0 = 50$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n - 2$.

On reconnaît une suite arithmétique (P_n) de premier terme $P_0 = 50$ et de raison -2 .

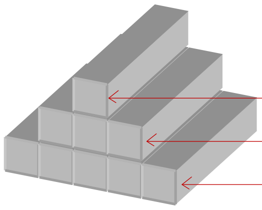
La difficulté de l'exercice réside dans l'effort à faire pour communiquer : il faut introduire la suite arithmétique pour présenter les calculs proprement.

On veut la somme de ses 23 premiers termes.

Le dernier terme est $P_{22} = P_0 - 2 \times 22$
$= 50 - 44$
$= 6$.

Donc, la somme vaut $23 \times \dfrac{50 + 6}{2} = 644$.

b) <u>$1^{\text{ère}}$ méthode</u>



On numérote les couches de manière naturelle, mais on aura pas de terme d'indice 0 .

Si on pose P_n le nombre de poutres de la $n^{\text{ème}}$ couche, on a $P_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = P_n + 2$.

On reconnaît une suite arithmétique $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de premier terme $P_1 = 1$ et de raison 2 .

On veut la somme de ses 100 premiers termes.

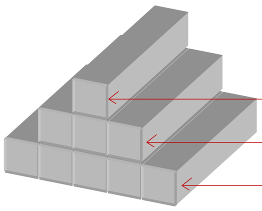
Le dernier terme est $P_{100} = P_1 + 2 \times (\,100 - 1\,)$

$\rightarrow$ On doit ruser avec la formule $u_n = u_0 + n \times r$ qui peut s'écrire $u_n = u_0 + r + (n-1) \times r$ ou encore $u_n = u_1 + (n-1) \times r$.

$= 1 + 198$
$= 199$.

Donc, la somme vaut $100 \times \dfrac{1 + 199}{2} = 10\,000$.

<u>$2^{\text{ème}}$ méthode</u>



On a un terme d'indice 0 , mais la numérotation n'est pas très naturelle.

Si on pose P_n le nombre de poutres de la $(\,n + 1\,)^{\text{ème}}$ couche, on a $P_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n + 2$.

On reconnaît une suite arithmétique $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $P_0 = 1$ et de raison 2 .

On veut la somme de ses 100 premiers termes.

Le dernier terme est $P_{99} = P_0 + 2 \times 99$
$= 1 + 198$
$= 199$.

Donc, la somme vaut $100 \times \dfrac{1 + 199}{2} = 10\,000$.