Correction de SOS MATH 1ère S – SUITES - Fiche 5

1. ***a)*** $u_1 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = \dfrac{5}{1-5} = -\dfrac{5}{4}$

$u_2 = \dfrac{u_1}{1-u_1} = \dfrac{-\frac{5}{4}}{1+\frac{5}{4}} = -\dfrac{5}{9}$

$u_3 = \dfrac{u_2}{1-u_2} = \dfrac{-\frac{5}{9}}{1+\frac{5}{9}} = -\dfrac{5}{14}$

b) On remarque qu'on ajoute 5 au dénominateur pour passer d'un terme au suivant.

On peut conjecturer que $u_4 = -\dfrac{5}{14+5} = -\dfrac{5}{19}$.

Puis que $u_5 = -\dfrac{5}{19+5} = -\dfrac{5}{24}$.

c)
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$a_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}}$ → J'utilise (R₂) : a_n en fonction de u_n en remplaçant n par $n+1$.

$= \dfrac{1}{\frac{u_n}{1-u_n}}$ → J'utilise (R₁) : u_{n+1} en fonction de u_n.

$= \dfrac{1-u_n}{u_n}$

$= \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{u_n}{u_n}$

$= a_n - 1$

L'autre méthode fonctionne aussi très bien :

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$

$= \dfrac{1}{\frac{u_n}{1-u_n}} - \dfrac{1}{u_n}$

$= \dfrac{1-u_n}{u_n} - \dfrac{1}{u_n}$

$= \dfrac{1-u_n-1}{u_n}$

$= \dfrac{-u_n}{u_n}$

$= -1$

- Donc, (a_n) est arithmétique de raison -1 et de premier terme $a_0 = \dfrac{1}{u_0} = \dfrac{1}{5}$.

d) On déduit du ***c)*** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 + n \times (-1) = \dfrac{1}{5} - n$. → J'obtiens (R₃) : a_n en fonction de n.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$a_n = \dfrac{1}{u_n} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{1}{a_n}$ → Je trafique (R₂) pour obtenir (R₄) : u_n en fonction de a_n.

Donc, d'après ***d)*** :

$u_n = \dfrac{1}{\frac{1}{5} - n}$ → J'injecte (R₃) dans (R₄) pour obtenir...

$= \dfrac{1}{\frac{1-5n}{5}}$

$= \dfrac{5}{1-5n}$ → ... (R₅).

Après tant d'efforts, il est fortement conseillé de vérifier cette expression en calculant rapidement $u_0 = 5$, $u_1 = -\frac{5}{4}$, $u_2 = -\frac{5}{9}$ pour les comparer aux résultats trouvés dans le a) ... ça marche...

f) $u_4 = \dfrac{5}{1-5\times4} = -\dfrac{5}{19}$ → (R₅) me permet de calculer n'importe quel terme connaissant son rang...

$u_5 = \dfrac{5}{1-5\times5} = -\dfrac{5}{24}$

$u_{100} = \dfrac{5}{1-5\times100} = -\dfrac{5}{499}$ → ... aussi loin soit-il !

2. ***a)*** $v_1 = \frac{9}{6 - v_0} = \frac{9}{6-1} = \frac{9}{5}$

$v_2 = \frac{9}{6 - v_1} = \frac{9}{6 - \frac{9}{5}} = \frac{15}{7}$

$v_3 = \frac{9}{6 - v_2} = \frac{9}{6 - \frac{15}{7}} = \frac{7}{3}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1} - 3}$$

→ J'utilise (R_2) : w_n en fonction de v_n, en remplaçant n par $n+1$.

$$= \frac{1}{\frac{9}{6 - v_n} - 3}$$

→ J'utilise (R_1) : v_{n+1} en fonction de v_n.

$$= \frac{1}{\frac{9}{6 - v_n} - \frac{3(6 - v_n)}{6 - v_n}}$$

$$= \frac{1}{\frac{9 - 18 + 3v_n}{6 - v_n}}$$

$$= \frac{6 - v_n}{-9 + 3v_n}$$

→ Ne pas louper le facteur commun !

$$= \frac{6 - v_n}{3(v_n - 3)}$$

→ On se retrouve avec une expression dans laquelle il est difficile de faire apparaître w_n ...

On en déduit :

$$w_{n+1} - w_n = \frac{6 - v_n}{3(v_n - 3)} - \frac{1}{v_n - 3}$$

→ ... On peut alors facilement changer de méthode en cours de route !

$$= \frac{6 - v_n}{3(v_n - 3)} - \frac{3}{3(v_n - 3)}$$

→ Une réduction au même dénominateur finira bien par donner quelque chose.

$$= \frac{3 - v_n}{3(v_n - 3)}$$

$$= \frac{-\cancel{(v_n - 3)}}{3\cancel{(v_n - 3)}}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

Rester sur la première méthode demandait un peu d'astuce :

$$w_{n+1} = \frac{6 - v_n}{3(v_n - 3)}$$

$$= \frac{3 + 3 - v_n}{3(v_n - 3)}$$

$$= \frac{3}{3(v_n - 3)} + \frac{3 - v_n}{3(v_n - 3)}$$

$$= \frac{1}{v_n - 3} + \frac{-(v_n - 3)}{3(v_n - 3)}$$

$$= w_n - \frac{1}{3}$$

Donc, (w_n) est arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $w_0 = \frac{1}{v_0 - 3} = -\frac{1}{2}$.

c) On déduit du ***b)*** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 + n \times (-\frac{1}{3})$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{n}{3}.$$

→ J'obtiens (R_3) : w_n en fonction de n.

d)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3} \Leftrightarrow w_n(v_n - 3) = 1$$

→ Je trafique (R_2) pour obtenir (R_4) : v_n en fonction de w_n.

$$\Leftrightarrow w_n v_n - 3w_n = 1$$

$$\Leftrightarrow w_n v_n = 1 + 3w_n$$

$$\Leftrightarrow v_n = \frac{1 + 3w_n}{w_n}$$

- Donc, d'après ***c)*** :

$$v_n = \frac{1 + 3(-\frac{1}{2} - \frac{n}{3})}{-\frac{1}{2} - \frac{n}{3}}$$

→ J'injecte (R_3) dans (R_4) pour obtenir...

$$= \frac{\frac{-6n - 3}{6}}{\frac{-3 - 2n}{6}}$$

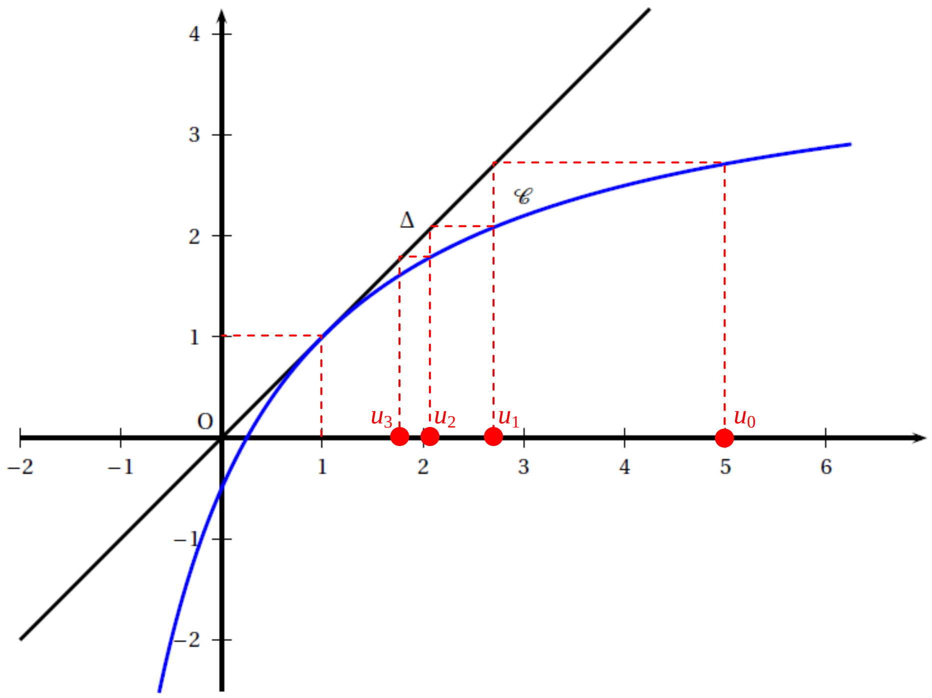
$$= \frac{-6n - 3}{-3 - 2n}$$

$$= \frac{6n + 3}{2n + 3}$$

→ ... (R_5).

Je vérifie cette expression en calculant rapidement $v_0 = 1$, $v_1 = \frac{9}{5}$, $v_2 = \frac{15}{7}$, $v_3 = \frac{7}{3}$ pour les comparer aux résultats trouvés dans le a) ... ça marche...

3. ***a)***



On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 1 .

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} - \dfrac{u_n + 2}{u_n + 2}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{3u_n - 3}{u_n + 2}}$$

$$= \frac{u_n + 2}{3\,(u_n - 1)}$$

→ J'abandonne la première méthode car il paraît bien difficile de faire apparaître v_n ...

On en déduit :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2}{3\,(u_n - 1)} - \frac{1}{u_n - 1}$$

$$= \frac{u_n + 2}{3\,(u_n - 1)} - \frac{3}{3\,(u_n - 1)}$$

$$= \frac{u_n - 1}{3\,(u_n - 1)}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Donc, (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{4}$.

c) On déduit du ***b)*** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{n}{3}$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \Leftrightarrow v_n\,(u_n - 1) = 1$$

→ Rappelons que le but est d'isoler u_n .

$$\Leftrightarrow v_n\,u_n - v_n = 1$$

$$\Leftrightarrow v_n\,u_n = 1 + v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1 + v_n}{v_n}$$

On en déduit :

$$u_n = \frac{1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{n}{3}}{\dfrac{1}{4} + \dfrac{n}{3}}$$

$$= \frac{\dfrac{12 + 3 + 4n}{12}}{\dfrac{3 + 4n}{12}}$$

$$= \frac{15 + 4n}{3 + 4n}$$

→ On calcule rapidement $u_0 = 5$, $u_1 = 2{,}71...$, $u_2 = 2{,}09...$ pour les vérifier sur le graphique du a) ... ça marche...

d) $u_{100} = \dfrac{15 + 4\times100}{3 + 4\times100} = \dfrac{415}{403} \approx 1{,}0298$

$u_{101} = \dfrac{15 + 4\times101}{3 + 4\times101} = \dfrac{419}{407} \approx 1{,}0295$

$u_{102} = \dfrac{15 + 4\times102}{3 + 4\times102} = \dfrac{141}{137} \approx 1{,}0292$

On constate que les trois valeurs sont décroissantes et qu'elles sont très proches de 1.

Cela confirme les conjectures faites au ***a)*** .