Correction de SOS MATH 1ère S – SUITES - Fiche 6

1. ***a)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n$, → On reconnait que u_n est de la forme $a \times b^n$, c'est terminé !

donc (u_n) géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

Autre méthode :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} = 3 \times 2^n \times 2 = 2\,u_n$

donc (u_n) géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3 \times 2^0 = 3$.

Autre méthode :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est le produit de deux entiers non nuls 3 et 2^n,

donc u_n non nul. → Étape indispensable qui prend un peu de temps...

De plus :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 2^{n+1}}{3 \times 2^n} = \frac{3}{3} \times 2^{n+1-n} = 2$$

donc (u_n) géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3 \times 2^0 = 3$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (3 \times 2)^n = 6^n$ → On reconnait que u_n est de la forme $a \times b^n$ ...

donc (v_n) géométrique de raison 6 et de premier terme $v_0 = 1$.

c)
$$\begin{cases} \dfrac{w_1}{w_0} = \dfrac{2\times(-5)+1}{-5} = \dfrac{-9}{-5} = \dfrac{9}{5} \\[2ex] \dfrac{w_2}{w_1} = \dfrac{2\times\frac{9}{5}+1}{\frac{9}{5}} = \dfrac{23}{9} \end{cases}$$

donc $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}$ n'est pas constant, → On travaille avec des valeurs particulières, on n'a pas à se soucier de la non nullité de u_n.

donc (w_n) n'est pas géométrique.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = 5 \times \left(\frac{1}{7}\right)^n$, → Très efficace si on reconnait la forme $a \times b^n$ ...

donc (V_n) géométrique de raison $\frac{1}{7}$ et de premier terme $V_0 = 5$.

Autre méthode :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = \dfrac{5}{7^{n+1}} = \dfrac{5}{7^n \times 7} = \dfrac{5}{7^n} \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{7} V_n$

donc (V_n) géométrique de raison $\frac{1}{7}$ et de premier terme $V_0 = \frac{5}{7^0} = 5$.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-2) \times (-2)^n$,

donc (a_n) géométrique de raison -2 et de premier terme $a_0 = -2$.

Autre méthode :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = (-2)^{n+1+1} = (-2)^{n+1}\times(-2) = -2\,a_n$

donc (a_n) géométrique de raison -2 et de premier terme $a_0 = (-2)^{0+1} = -2$.

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = -\frac{1}{2} \times U_n$,

donc (U_n) géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

$U_{n+1} = -\frac{1}{2} \times U_n \Leftrightarrow U_n = -2\,U_{n+1}$

Donc $U_1 = -2\,U_2 = -2\times4 = -8$,

donc (U_n) de premier terme $U_0 = -2\,U_1 = -2\times(-8) = 16$.

g) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 3^{n+5} - 3^{n-1}$
$= 3^n \times 3^5 - 3^n \times 3^{-1}$
$= 3^n\,(3^5 - 3^{-1})$
$= 3^n\,(243 - \frac{1}{3})$
$= \frac{728}{3} \times 3^n$

donc (b_n) géométrique de raison 3 et de premier terme $b_0 = \frac{728}{3}$.

Autre méthode :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = 3^{n+1+5} - 3^{n+1-1}$
$= 3^{n+5} \times 3 - 3^{n-1} \times 3$
$= 3\,(3^{n+5} - 3^{n-1})$
$= 3\,b_n$
donc (b_n) géométrique de raison 3 et de premier terme $b_0 = 3^{0+5} - 3^{0-1} = 243 - \frac{1}{3} = \frac{728}{3}$.

h) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{3^{n+5}}{2^{n-1}}$
$= \frac{3^n \times 3^5}{2^n \times 2^{-1}}$
$= \frac{3^5}{2^{-1}} \times (\frac{3}{2})^n$
$= 486 \times (\frac{3}{2})^n$

donc (c_n) géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $c_0 = 486$.

Autre méthode :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \frac{3^{n+1+5}}{2^{n+1-1}}$
$= \frac{3^{n+5} \times 3}{2^{n-1} \times 2}$
$= \frac{3}{2} \times \frac{3^{n+5}}{2^{n-1}}$
$= \frac{3}{2}\,c_n$

donc (c_n) géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $c_0 = \frac{3^{0+5}}{2^{0-1}} = 486$.

---

2. **a)**
- D'une part, si on pose q la raison, on a : $u_8 = q \times u_7 \Rightarrow q = \frac{1\,171\,875}{234\,375} = 5$.

  D'autre part : $u_7 = u_0\,q^7 \Rightarrow u_0 = \frac{234\,375}{5^7} = 3$.

  donc (u_n) arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 3$.
- On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 5^n$.

  Et donc $u_5 = 3 \times 5^5 = 9\,375$.
- $u_6 = 5 \times u_5 = 5 \times 9\,375 = 46\,875$.

  $u_6 = \frac{u_7}{5} = \frac{234\,375}{5} = 46\,875$.

  $u_6 = 3 \times 5^6 = 46\,875$.

b) *En utilisant la même méthode, on obtient :*

$q = -2$ et $v_0 = 5$.

Puis $v_{19} = -2\,621\,440$.

c)
- D'une part, si on pose q la raison, on a :

  $$w_{10} = q \times w_9 = q \times q \times w_8 \Rightarrow w_{10} = q^2 \times w_8 \Rightarrow q^2 = \frac{118\,098}{13\,122} = 9 .$$

  On en déduit que $q = 3$ ou $q = -3$.
- Si q valait -3 , alors la suite (w_n) serait non monotone.
  Or (w_n) est croissante, donc $q = 3$.
  On en déduit que : $w_8 = w_0\,3^8 \Rightarrow w_0 = \frac{13\,122}{3^8} = 2$.

---

3. ***a)*** Les hauteurs en cm sont les termes d'une suite géométrique de raison $\frac{4}{3}$ et de premier terme 1,4 .

La hauteur en cm de la 6ème poupée vaut $1{,}4 \times (\frac{4}{3})^6 \approx 7{,}9$, arrondi au mm.

Les largeurs en mm sont les termes d'une suite géométrique de raison $\frac{4}{3}$ et de premier terme 5 .

La largeur en mm de la 6ème poupée vaut $5 \times (\frac{4}{3})^6 \approx 28$, arrondi au mm.

b) Chaque jour, la masse est diminuée de 5 %, donc multipliée par $1 - 5\ \% = 0{,}95$.
Donc (M_n) géométrique de premier terme $M_0 = 200$ et de raison 0,95 .

Au bout de 30 jours, sa masse en gramme est $M_{30} = 200 \times 0{,}95^{30} \approx 43$.

c) Si on note b_n le nombre de bactéries au bout de n heures, (b_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $b_0 = 1\,000$.

On a donc $b_n = 1\,000 \times 2^n$.

Alors, si b_n est de l'ordre de 2 000 000 , on a $1\,000 \times 2^n \approx 2\,000\,000$,
et donc $2^n \approx \frac{2\,000\,000}{1\,000} = 2\,000$
donc $2^n \approx 2 \times 10^3 \approx 2 \times 2^{10} = 2^{11}$.

Le nombre de bactéries est de l'ordre de 2 millions au bout de 11 heures.

d) Chaque année, le capital est augmenté de 2,1 %, donc multiplié par $1 + 2{,}1\ \% = 1{,}021$.
Donc (c_n) géométrique de premier terme $c_0 = 10\,000$ et de raison 1,021 .

Au bout de 10 ans, le capital en euros vaut donc $c_{10} = c_0 \times 1{,}021^{10} \approx 12\,309{,}98$.

---

4. ***a)*** On reconnaît les termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 2 .

Le dernier terme est $u_n = 2\,560$.
Or, on peut écrire $u_n = u_0 \times 2^n$.
On en déduit :

$$2\,560 = 10 \times 2^n \Leftrightarrow 2^n = 256$$
$$\Leftrightarrow 2^{n-1} = 128$$
$$\Leftrightarrow 2^{n-2} = 64$$
$$\Leftrightarrow 2^{n-3} = 32 = 2^5$$

Donc $n - 3 = 5$ et donc $n = 8$.
Donc $2\,560 = u_8$.
On en déduit que le nombre de termes est 9 .

Donc, S_1 vaut $10 \times \frac{1-2^9}{1-2} = 5\,110$.

→ J'applique la formule $\text{Somme} = 1^{\text{er}}\ \text{terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1 - \text{raison}}$.

b) On reconnaît les termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = \frac{2}{3}$ et de raison $\frac{1}{3}$.

Le premier terme est $\frac{2}{3^1}$ et le dernier terme est $\frac{2}{3^{10}}$,

→ Inutile de calculer le rang du dernier terme, les exposants suffisent pour répondre.

donc il y a 10 termes.

Donc, S_2 vaut $\frac{2}{3} \times \dfrac{1-(\frac{1}{3})^{10}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{59\,048}{59\,049}$.

c) On reconnaît les termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $\frac{2}{3}$.

Le premier terme est $1 = \frac{2^0}{3^0}$ et le dernier terme est $\frac{1\,024}{3^{10}} = \frac{2^{10}}{3^{10}}$,

donc il y a 11 termes.

Donc, S_3 vaut $1 \times \dfrac{1-(\frac{2}{3})^{11}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{175\,099}{59\,049}$.

d) $S_4 = 200 \times \frac{1-1{,}5^{20}}{1-1{,}5} \approx 1329703$, arrondi à l'unité.

e) On reconnaît les termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 2 \times 10^3$ et de raison 2×10^{-3} .

Le dernier terme est $u_n = 2\,048 \times 10^{-27}$.

Or, on peut écrire $u_n = u_0 \times (\ 2 \times 10^{-3}\ )^n \Leftrightarrow u_n = 2 \times 10^3 \times 2^n \times 10^{-3n}$
$\Leftrightarrow u_n = 2^{n+1} \times 10^{3-3n}$

On en déduit : $-27 = 3 - 3n$ et donc $n = 10$.
On vérifie : $2^{10+1} = 2^{11} = 2\,048$.

Donc le dernier terme est u_{10} .
On en déduit que le nombre de termes est 11 .

Donc, S_6 vaut $2 \times 10^3 \times \frac{1-(\ 2 \times 10^{-3}\ )^{11}}{1 - 2 \times 10^{-3}} \approx 2\,004$.

f) On reconnaît les termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison -3 .

Le dernier terme est $u_n = 3^{11}$.

Il peut s'écrire 3×3^{10} ou encore $3 \times (-3)^{10}$ car 10 est pair. → *Là aussi, inutile de calculer le rang du dernier terme, une décomposition suffit.*
On en déduit $n = 10$.

Donc le dernier terme est u_{10} .
On en déduit que le nombre de termes est 11 .

Donc, S_6 vaut $3 \times \dfrac{1-(-3)^{11}}{1-(-3)} = 132\ 861$.

g) On reconnaît les termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 5^2$ et de raison 5 .

Le dernier terme est $u_n = 5^{10}$.

Il peut s'écrire $5^2 \times 5^8$, donc $n = 8$.
Donc le dernier terme est u_8 .
On en déduit que le nombre de termes est 9 .

Donc, S_7 vaut $5^2 \times \dfrac{1-5^9}{1-5} = 12\ 207\ 025$.

h) On reconnaît les termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = \dfrac{2}{3}$ et de raison $\dfrac{1}{3}$.

Le dernier terme est $u_n = \dfrac{2}{3^n}$.

Il peut s'écrire $\dfrac{2}{3} \times (\dfrac{1}{3})^{n-1}$, donc le dernier terme est de rang $n - 1$.

On en déduit que le nombre de termes est n .

Donc, S_n vaut $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1-(\dfrac{1}{3})^n}{1-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1-\dfrac{1}{3^n}}{\dfrac{2}{3}} = 1 - \dfrac{1}{3^n}$.