Correction de SOS MATH 1ère S – SUITES - Fiche 7

Pour faciliter la navigation dans cette longue correction, vous pouvez accéder directement aux exercices : **1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.**

1. ***a)***

$$U_1 = \frac{1}{2}U_0 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

$$U_2 = \frac{1}{2}U_1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(-1) - \frac{3}{2} = -2$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$V_{n+1} = U_{n+1} + 3$ → J'utilise la formule de V_n en fonction de U_n en remplaçant n par $n+1$.

$= (\frac{1}{2}U_n - \frac{3}{2}) + 3$ → J'utilise la formule de U_{n+1} en fonction de U_n.

$= \frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2}$ → Je sais que je dois obtenir $\ldots \times V_n$, c'est-à-dire $\ldots \times (U_n + 3)$, il faut donc que je **factorise**, et c'est nécessairement par $\frac{1}{2}$.

$= \frac{1}{2}(U_n + 3)$ → Aucun risque ! On est certain de voir apparaître $U_n + 3$.

$= \frac{1}{2}V_n$

Donc (V_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = U_0 + 3 = 1 + 3 = 4$.

c) On déduit du ***b)*** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times (\frac{1}{2})^n = \frac{4}{2^n}$. → Je transforme $(\frac{1}{2})^n$ en un plus simple $\frac{1}{2^n}$ ($\frac{4}{2^n}$ peut s'écrire $\frac{1}{2^{n-2}}$).

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$V_n = U_n + 3 \Leftrightarrow U_n = V_n - 3$

Donc, d'après ***c)*** :

$U_n = \frac{4}{2^n} - 3$

Avant d'utiliser cette formule dans les questions suivantes, il est fortement conseillé de la vérifier en calculant rapidement $U_0 = \frac{4}{2^0} - 3 = 1$, $U_1 = \frac{4}{2^1} - 3 = -1$ et $U_2 = \frac{4}{2^2} - 3 = -2$ pour les comparer aux résultats trouvés dans le a) ...

e)

- $S = V_0 + V_1 + \ldots + V_{10}$

$= 4 \times \dfrac{1 - (\frac{1}{2})^{11}}{1 - \frac{1}{2}}$ car $\begin{cases} (V_n) \text{ géométrique de raison } \frac{1}{2} \text{ et de premier terme } 4, \\ \text{le nombre de termes est } 11. \end{cases}$

→ Je justifie la formule avec la nature de la suite...

→ ... et je précise le nombre de termes.

$= \dfrac{2\,047}{256}$

- $S' = U_0 + U_1 + \ldots + U_{10}$

$= V_0 - 3 + V_1 - 3 + \ldots + V_{10} - 3$ → J'applique $U_n = V_n - 3$ onze fois, pour chaque terme de la somme.

$= (V_0 + V_1 + \ldots + V_{10}) - 11 \times 3$

$= \dfrac{2\,047}{256} - 33$

$= \dfrac{-6\,401}{256}$

2. ***a)*** $u_1 = \dfrac{3u_0}{1+2u_0}$

$= \dfrac{3\times\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}$

$u_2 = \dfrac{3u_1}{1+2u_1}$

$= \dfrac{3\times\frac{3}{4}}{1+2\times\frac{3}{4}} = \dfrac{9}{10}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$

$= \dfrac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}}$ → Je ne m'inquiète pas de la lourdeur du calcul...

$= \dfrac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1+2u_n}{1+2u_n}-\frac{3u_n}{1+2u_n}}$

$= \dfrac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1-u_n}{1+2u_n}}$

$= \dfrac{3u_n}{\cancel{1+2u_n}} \times \dfrac{\cancel{1+2u_n}}{1-u_n}$ → ... car les dénominateurs s'éliminent !

$= \dfrac{3u_n}{1-u_n}$ → Je sais que je dois obtenir $\dots \times v_n$, c'est-à-dire $\dots \times \dfrac{u_n}{1-u_n}$, ça ne va pas être bien difficile !

$= 3 \times \dfrac{u_n}{1-u_n}$

$= 3v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

c) On déduit du ***b)*** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 3^n = 3^n$.

d)
- (v_n) géométrique de premier terme $1 > 0$ et de raison $3 > 1$, donc (v_n) croissante.
- Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > v_0 = 1$ et donc $v_n \neq -1$.

e)
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n} \Leftrightarrow v_n(1-u_n) = u_n$ → Mon but est d'isoler u_n.

$\Leftrightarrow v_n - v_n u_n = u_n$

$\Leftrightarrow u_n + v_n u_n = v_n$ → Je regroupe les u_n à gauche.

$\Leftrightarrow u_n(1+v_n) = v_n$

$\Leftrightarrow u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n}$ car $v_n \neq -1$

- D'après le ***c)*** , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3^n}{1+3^n}$. → Vérifiez votre formule avec les valeurs du a) .

f) $u_{10} = \dfrac{3^{10}}{1+3^{10}} = \dfrac{59\,049}{59\,050}$.

Donc $u_{10} \approx 0{,}99998$, arrondi à 10^{-5} .

On peut conjecturer que la suite (u_n) tend vers 1 .

3. ***a)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 12 \\ &= 0{,}9\,u_n + 1{,}2 - 12 \\ &= 0{,}9\,u_n - 10{,}8 \\ &= 0{,}9\left(u_n - \frac{10{,}8}{0{,}9}\right) && \rightarrow \text{Je factorise nécessairement par } 0{,}9 \text{ mais que va-t-il se passer avec } \frac{10{,}8}{0{,}9} \text{ ... Suspense ...} \\ &= 0{,}9\,(u_n - 12) && \rightarrow \text{Ouf, ça fait bien } 12\text{ .} \\ &= 0{,}9\,v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $0{,}9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 12 = -2$.

b)

- On déduit du ***a)*** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0{,}9^n = -2 \times 0{,}9^n$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $v_n = u_n - 12 \iff u_n = v_n + 12$

  Et donc, $u_n = -2 \times 0{,}9^n - 12$.

4. ***a)***

$$u_1 = \frac{u_0+2}{2u_0+1} = \frac{2+2}{2\times 2+1} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$u_2 = \frac{u_1+2}{2u_1+1} = \frac{\frac{4}{5}+2}{2\times\frac{4}{5}+1} = \frac{14}{13} \approx 1{,}08$$

$$u_3 = \frac{u_2+2}{2u_2+1} = \frac{\frac{14}{13}+2}{2\times\frac{14}{13}+1} = \frac{40}{41} \approx 0{,}98$$

$$u_4 = \frac{u_3+2}{2u_3+1} = \frac{\frac{40}{41}+2}{2\times\frac{40}{41}+1} = \frac{122}{121} \approx 1{,}01$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

si v_n était égal à 1 ,

alors on aurait $\frac{u_n-1}{u_n+1} = 1$

$\Leftrightarrow u_n - 1 = u_n + 1$

$\Leftrightarrow -1 = 1$: ce qui est impossible.

Donc, nécessairement, v_n différent de 1 .

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{u_n+2}{2u_n+1}-1}{\frac{u_n+2}{2u_n+1}+1} = \frac{\frac{u_n+2-2u_n-1}{2u_n+1}}{\frac{u_n+2+2u_n+1}{2u_n+1}} = \frac{-u_n+1}{\cancel{2u_n+1}} \times \frac{\cancel{2u_n+1}}{3u_n+3} = \frac{-u_n+1}{3u_n+3} = \frac{-(u_n-1)}{3(u_n+1)} = -\frac{1}{3}\times\frac{u_n-1}{u_n+1} = -\frac{1}{3}v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times (-\frac{1}{3})^n = \frac{1}{3}\times(-\frac{1}{3})^n$. → *Attention, on a vu que $(\frac{1}{2})^n$ s'écrit simplement $\frac{1}{2^n}$, mais pas $(-\frac{1}{3})^n$ ...*

d)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1} \Leftrightarrow v_n(u_n+1) = u_n - 1$

$\Leftrightarrow v_n u_n + v_n = u_n - 1$

$\Leftrightarrow v_n u_n - u_n = -1 - v_n$ → *Je regroupe les u_n à gauche.*

$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{-1-v_n}{v_n-1}$ car $v_n \neq 1$ → *On peut écrire $\frac{1+v_n}{1-v_n}$.*

- Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{-1-\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{3})^n}{\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{3})^n-1} = \dfrac{\frac{-3-(-\frac{1}{3})^n}{\cancel{3}}}{\frac{(-\frac{1}{3})^n-3}{\cancel{3}}} = \dfrac{3+(-\frac{1}{3})^n}{3-(-\frac{1}{3})^n}$.

5. ***a)*** $u_1 = 3u_0 - 2\times 0 + 3$ → Attention, si l'indice $n+1$ vaut 1, alors tous les n valent 0.

$= 3\times 0 + 3 = 3$

$u_2 = 3u_1 - 2\times 1 + 3$

$= 3\times 3 + 1 = 10$

$u_3 = 3u_2 - 2\times 2 + 3$

$= 3\times 10 - 1 = 29$

$u_4 = 3u_3 - 2\times 3 + 3$

$= 3\times 29 - 3 = 84$

b) On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$v_{n+1} = \underline{u_{n+1}} - (\underline{n+1}) + 1$ → Attention à bien remplacer les deux n par $n+1$.

$= 3u_n - 2n + 3 - n - 1 + 1$

$= 3u_n - 3n + 3$

$= 3(u_n - n + 1)$ → Factorisation par 3 plus qu'évidente…

$= 3\,v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$.

d) *La question est brutale et demande l'expérience des exercices précédents : vous devez penser à exprimer* ***v_n en fonction de n***, *puis* ***u_n en fonction de v_n***, *pour enfin déduire des deux expressions précédentes* ***u_n en fonction de n***.

- On déduit du ***c)*** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 3^n = 3^n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $v_n = u_n - n + 1 \Leftrightarrow u_n = v_n + n - 1$
- Et donc $u_n = 3^n + n - 1$. → Vérifiez votre formule avec les valeurs du a).

e)
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $u_{n+1} - u_n = (3^{n+1} + (n+1) - 1) - (3^n + n - 1)$

  $= 3^{n+1} + n - 3^n - n + 1$

  $= 3^{n+1} - 3^n + 1$

  $= 3^n(3-1) + 1$

  $= 2\times 3^n + 1$ → Inutile de chercher à factoriser pour étudier le signe de cette somme de deux nombres positifs !

  $\begin{cases} 2 > 0 \\ 3^n > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$ et donc $u_{n+1} > u_n$.

  Donc, (u_n) est croissante : la conjecture est démontrée.

6. ***a)*** $u_2 = \dfrac{1 \times u_1 + 1}{2\,(1+1)}$ → Attention, si l'indice $n+1$ vaut 2, alors tous les n valent 1.

$= \dfrac{\frac{3}{2}+2}{4} = \dfrac{7}{8}$

$u_3 = \dfrac{2 \times u_2 + 1}{2\,(2+1)}$ → Et si l'indice $n+1$ vaut 3, alors tous les n valent 2.

$= \dfrac{2\times\frac{7}{8}+1}{6} = \dfrac{11}{24}$

b) Pour tout entier $n > 1$:

$v_{n+1} = (n+1)\,u_{n+1} - 1$ → Attention à bien remplacer les deux n par $n+1$.

$= \cancel{(n+1)}\dfrac{nu_n+1}{2\,\cancel{(n+1)}} - 1$ → Ça commence bien avec cette simplification par $n+1$ ...

$= \dfrac{nu_n+1}{2} - \dfrac{2}{2}$

$= \dfrac{nu_n-1}{2}$ → C'est du tout cuit !

$= \dfrac{1}{2}v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = 1\times u_1 - 1 = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$. → Attention, le premier terme n'est pas v_0 !

c) De la formule $v_n = v_0 \times q^n$, on déduit $v_n = v_0 \times q \times q^{n-1}$, et enfin $v_n = v_1 \times q^{n-1}$.

- On déduit du ***b)*** que, pour tout entier $n > 1$, $v_n = v_1 \times (0{,}5)^{n-1}$ → La formule finale attendue me pousse à changer mes $\frac{1}{2}$ en $0{,}5$.

  $= 0{,}5 \times (0{,}5)^{n-1}$

  $= (0{,}5)^n$.

- Pour tout entier $n > 1$:

  $v_n = nu_n - 1 \Leftrightarrow nu_n = v_n + 1$

  $\Leftrightarrow u_n = \dfrac{v_n+1}{n}$ → On comprend mieux pourquoi n ne commence pas à 0.

- On a donc bien $u_n = \dfrac{1+(0{,}5)^n}{n}$.

d) $u_{10} = \dfrac{1+(0{,}5)^{10}}{10} \approx 0{,}100$, arrondi au millième.

$u_{20} = \dfrac{1+(0{,}5)^{20}}{20} \approx 0{,}050$, arrondi au millième.

7. ***a)***

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2}{3}u_0 + \frac{1}{3}\times 0 + 1 \\ &= \frac{2}{3}\times 2 + 1 = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}\times 1 + 1 \\ &= \frac{2}{3}\times\frac{7}{3} + \frac{4}{3} = \frac{26}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3}\times 2 + 1 \\ &= \frac{2}{3}\times\frac{26}{9} + \frac{5}{3} = \frac{97}{27} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{3} u_k &= 2 + \frac{7}{3} + \frac{26}{9} + \frac{97}{27} \\ &= \frac{292}{27} \end{aligned}$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) \\ &= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 \\ &= \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n \\ &= \frac{2}{3}(u_n - 1) \\ &= \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$.

d)

- On déduit du ***c)*** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times (\frac{2}{3})^n = 2\times(\frac{2}{3})^n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $v_n = u_n - n \Leftrightarrow u_n = v_n + n$

- Et donc $u_n = 2\,(\frac{2}{3})^n + n$. → Vérifiez votre formule avec les valeurs du a) .

e)

- $S_n = 2 \times \dfrac{1 - (\frac{2}{3})^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}$ car $\begin{cases} (v_n) \text{ géométrique de raison } \frac{2}{3} \text{ et de premier terme } 2\,, \\ \text{le nombre de termes est } n+1 \end{cases}$

  → Je justifie la formule avec la nature de la suite...

  → ... et je précise le nombre de termes.

  $= 6 \times (1 - (\frac{2}{3})^{n+1})$

- $T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

  $= v_0 + 0 + v_1 + 1 + \ldots + v_n + n$ → J'applique $u_n = v_n + n$ pour chaque terme de la somme.

  $= S_n + (0 + 1 + \ldots + n)$ → Je reconnais S_n et la somme des $n+1$ premiers entiers, dont je connais la formule par cœur !

  $= 6 \times (1 - (\frac{2}{3})^{n+1}) + \dfrac{n(n+1)}{2}$ → Je vérifie avec la question b) : $T_3 = 6 \times (1 - (\frac{2}{3})^{3+1}) + \dfrac{3(3+1)}{2} = \dfrac{292}{27}$, yes...

8. ***a)*** $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2$

$= \frac{1}{3}\times 1 - 2 = -\frac{5}{3}$

$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2$

$= \frac{1}{3}\times(-\frac{5}{3}) - 1 = -\frac{14}{9}$

$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2$

$= \frac{1}{3}\times(-\frac{14}{9}) = -\frac{14}{27}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2}$

$= -2(\frac{1}{3}u_n + n - 2) + 3n + 3 - \frac{21}{2}$

$= -\frac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2}$

$= -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2}$

$= -\frac{1}{3}(2u_n - 3n + \frac{21}{2})$ → Je factorise par $-\frac{1}{3}$ pour garder $2u_n$, puis $\begin{cases} \text{pour faire } n\text{, il faut } -\frac{1}{3}\times(-3n) \\ \text{et pour faire } -\frac{7}{2}\text{, il faut } -\frac{1}{3}\times\frac{21}{2} \end{cases}$, comme par hasard...

$= -\frac{1}{3}v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -2u_0 + 3\times 0 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$.

c) Attention, question très calculatoire...

- On déduit du ***b)*** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times (-\frac{1}{3})^n = -\frac{25}{2}\times(-\frac{1}{3})^n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2} \Leftrightarrow -2u_n = v_n - 3n + \frac{21}{2}$

$\Leftrightarrow u_n = -\frac{1}{2}(v_n - 3n + \frac{21}{2})$

$\Leftrightarrow u_n = -\frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

- Et donc $u_n = -\frac{1}{2}(-\frac{25}{2}\times(-\frac{1}{3})^n) + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

$= \frac{25}{4}\times(-\frac{1}{3})^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

En posant $\begin{cases} g_n = \frac{25}{4}\times(-\frac{1}{3})^n \\ a_n = \frac{3}{2}n - \frac{21}{4} \end{cases}$, on a bien $u_n = g_n + a_n$ avec $\begin{cases} (g_n) \text{ géométrique de raison } -\frac{1}{3} \text{ et de premier terme } \frac{25}{4} \\ (a_n) \text{ arithmétique de raison } \frac{3}{2} \text{ et de premier terme } -\frac{21}{4}. \end{cases}$

C'est rare, mais on a reconnu $b\times a^n$, la forme explicite des suites géométriques, et $b + a\times n$, la forme explicite des suites arithmétiques.

d) $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ → $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

$= \sum_{k=0}^{n} g_k + \sum_{k=0}^{n} a_k$ → $(g_0 + a_0) + (g_1 + a_1) + \ldots + (g_n + a_n) = (g_0 + g_1 + \ldots + g_n) + (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$

$= g_0 \dfrac{1-(-\frac{1}{3})^{n+1}}{1-(-\frac{1}{3})} + (n+1)\dfrac{a_0 + a_n}{2}$ car $\begin{cases} (g_n) \text{ géométrique de raison } -\frac{1}{3} \\ (a_n) \text{ arithmétique} \\ \text{le nombre de termes est } n+1 \end{cases}$

$= \frac{25}{4}\times\frac{3}{4}(1-(-\frac{1}{3})^{n+1}) + (n+1)\dfrac{-\frac{21}{4} + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}}{2}$

$= \frac{75}{16}(1-(-\frac{1}{3})^{n+1}) + (n+1)(-\frac{21}{4} + \frac{3}{4}n)$ → On pourrait développer, mais ça n'apporterait pas grand-chose.

9. *a)* $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\times(-1) = \frac{3}{4}$

$$\begin{cases} u_1 - u_0 = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2} \\ u_2 - u_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

donc $u_{n+1} - u_n$ n'est pas constant,
donc, (u_n) n'est pas arithmétique.

$$\begin{cases} \frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2} \\ \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'est pas constant,
donc, (u_n) n'est pas géométrique.

b) **1°)** $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\times(-1) = 1$

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}$ → J'applique $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ en remplaçant les indices $n+1$ et n par $n+2$ et $n+1$.

$= u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1}$ → Je remplace u_{n+2} par son expression en fonction de u_{n+1} et u_n .

$= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

$= \frac{1}{2}(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n)$

$= \frac{1}{2}v_n$

3°) On déduit du **2°)** que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

4°) On déduit du **3°)** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^n}$.

c) **1°)** $w_0 = \frac{u_0}{v_0}$

$= \frac{-1}{1} = -1$

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$ → J'applique $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ en remplaçant les indices n par $n+1$.

$= \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}$ car $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \Leftrightarrow u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ → Le remplacement de v_{n+1} est facile, celui de u_{n+1} n'est pas évident...

$= \frac{v_n}{\frac{1}{2}v_n} + \frac{\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}$

$= 2 + \frac{u_n}{v_n}$

$= 2 + w_n$

3°) On déduit du **2°)** que (w_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme $w_0 = -1$.

4°) On déduit du **3°)** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 + n\times 2 = -1 + 2n$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$w_n = \frac{u_n}{v_n} \Leftrightarrow u_n = w_n \times v_n$

Or, d'après ***b)*** , $v_n = \frac{1}{2^n}$ et, d'après ***c)*** , $w_n = 2n - 1$,

donc $u_n = (2n-1)\times\frac{1}{2^n} = \frac{2n-1}{2^n}$.