Correction de SOS MATH 1ère S – TRIGONOMÉTRIE - Fiche 1

1. ***a)*** $\cos 87\pi = \cos(\pi + 86\pi)$
$= \cos \pi$ → Car 86π multiple de 2π.
$= -1$

b) $\sin 200\pi = \sin 0$ → Car 200π multiple de 2π.
$= 0$

c) $\cos \frac{9\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{8\pi}{2}\right)$
$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right)$
$= \cos \frac{\pi}{2}$
$= 0$

d) $\sin \frac{19\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{18\pi}{2}\right)$
$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + 9\pi\right)$
$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi + 8\pi\right)$
$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)$
$= -\sin \frac{\pi}{2}$
$= -1$

<u>Autre méthode</u> : On pouvait aussi préférer n'avoir que des tours complets :

$\sin \frac{19\pi}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{20\pi}{2}\right)$
$= \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 10\pi\right)$
$= \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
$= -1$

e) Dans la table de 3, 25 est entre 24 et 27.

Donc $\frac{25\pi}{3}$ peut s'écrire
- $\frac{24\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ qui donne 8π (et donc 4 tours complets) et un sympathique $\frac{\pi}{3}$,
- ou $\frac{27\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}$ qui donne 9π (et donc 4 tours complets + un demi-tour) et un peu sympathique $-\frac{2\pi}{3}$.

$\cos \frac{25\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{24\pi}{3}\right)$
$= \cos\left(\frac{\pi}{3} + 8\pi\right)$
$= \cos \frac{\pi}{3}$
$= \frac{1}{2}$

f) Dans la table de 3, -17 est entre -18 et -15.

Donc $-\frac{17\pi}{3}$ peut s'écrire
- $-\frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ qui donne -6π (et donc 3 tours complets dans le sens négatif) et un toujours sympathique $\frac{\pi}{3}$,
- ou $-\frac{15\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}$ qui donne -5π (et donc 2 tours complets + un demi-tour) et un toujours peu sympathique $-\frac{2\pi}{3}$.

$\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{18\pi}{3}\right)$
$= \sin\left(\frac{\pi}{3} - 6\pi\right)$
$= \sin \frac{\pi}{3}$
$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

g) Dans la table de 4, 43 est entre 40 et 44.

Donc $\frac{43\pi}{4}$ peut s'écrire
- $\frac{40\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}$ qui donne 10π (et donc 5 tours complets) et un $\frac{3\pi}{4}$ qui demandera un ajustement,
- ou $\frac{44\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$ qui donne 11π (et donc 5 tours complets + un demi-tour) et un $-\frac{\pi}{4}$ négatif.

$\cos \frac{43\pi}{4} = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{40\pi}{4}\right)$
$= \cos\left(\frac{3\pi}{4} + 10\pi\right)$
$= \cos \frac{3\pi}{4}$
$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$ → $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, leurs cosinus sont opposés (ou on applique $\cos \frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4}$).

h) Dans la table de 6, 43 est entre 42 et 48.

Donc $\frac{43\pi}{6}$ peut s'écrire
- $\frac{42\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$ qui donne 7π (et donc un demi-tour à gérer) et un $\frac{\pi}{6}$ sympathique,
- ou $\frac{48\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}$ qui donne 8π (et donc 4 tours complets) mais un peu agréable $-\frac{5\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{43\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{42\pi}{6}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + 7\pi\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi + 6\pi\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right)\\ &= -\sin\frac{\pi}{6}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

→ Je peux préférer un nombre impair de π et un petit $\frac{\pi}{6}$.

Autre méthode : On pouvait aussi préférer n'avoir que des tours complets :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{43\pi}{6}\right) &= \sin\left(-\frac{5\pi}{6} + \frac{48\pi}{6}\right)\\ &= \sin\left(-\frac{5\pi}{6} + 8\pi\right)\\ &= \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\\ &= -\sin\frac{5\pi}{6}\\ &= -\sin\frac{\pi}{6}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

→ $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, leurs sinus sont égaux.

Ou alors, on applique $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$

i) Dans la table de 3, -26 est entre -27 et -24.

Donc $-\frac{26\pi}{3}$ peut s'écrire
- $-\frac{27\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ qui donne -9π (et donc un demi-tour à gérer) et un $\frac{\pi}{3}$ sympathique,
- ou $-\frac{24\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}$ qui donne -8π (et donc 4 tours complets) et un $-\frac{2\pi}{3}$ peu agréable.

$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{26\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{27\pi}{3}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - 9\pi\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi - 10\pi\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)\\ &= -\cos\frac{\pi}{3}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Autre méthode : On pouvait aussi préférer n'avoir que des tours complets :

$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{26\pi}{3}\right) &= \cos\left(-\frac{2\pi}{3} - \frac{24\pi}{3}\right)\\ &= \cos\left(-\frac{2\pi}{3} - 8\pi\right)\\ &= \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= -\cos\frac{2\pi}{3}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

→ $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

---

2. **a)**

- Dans la table de 12, 25 est juste après 24.

  Donc $\frac{25\pi}{12}$ peut s'écrire $\frac{24\pi}{12} + \frac{\pi}{12}$ qui donne 2π et l'angle dont on connait le sinus...

$$\begin{aligned}\sin\frac{25\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{12} + 2\pi\right)\\ &= \sin\frac{\pi}{12}\\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\sin\frac{13\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{12} + \pi\right)\\ &= -\sin\frac{\pi}{12}\\ &= \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

- Dans la table de 12, 23 est juste avant 24.

  Donc $\frac{23\pi}{12}$ peut s'écrire $\frac{24\pi}{12} - \frac{\pi}{12}$.

$$\begin{aligned}\sin\frac{23\pi}{12} &= \sin\left(-\frac{\pi}{12} + 2\pi\right)\\ &= \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\\ &= -\sin\frac{\pi}{12}\\ &= \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

- $\sin\frac{11\pi}{12} = \sin(-\frac{\pi}{12}+\pi)$

$= \sin\frac{\pi}{12}$ → *Attention, il serait maladroit de se débarrasser de π puis du signe - ! On a une formule $\sin(\pi - x) = \sin x$ ...*

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

- *La soudaine présence du cos fait penser à la formule $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = \sin x$.*

En effet, $\frac{7\pi}{12}$ peut s'écrire $\frac{\pi}{12}+\frac{6\pi}{12}$ qui vaut comme par hasard $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}$ ...

$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2})$

$= -\sin\frac{\pi}{12}$

$= \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

b)

- $\frac{\pi}{12}$ est entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, donc son cosinus est positif.

- $(\cos\frac{\pi}{12})^2 + (\sin\frac{\pi}{12})^2 = 1$

$\Leftrightarrow (\cos\frac{\pi}{12})^2 = 1-(\sin\frac{\pi}{12})^2$

$\Leftrightarrow (\cos\frac{\pi}{12})^2 = 1-(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})^2$

$\Leftrightarrow (\cos\frac{\pi}{12})^2 = 1-\frac{(\sqrt{6})^2-2\sqrt{6}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{16}$

$\Leftrightarrow (\cos\frac{\pi}{12})^2 = \frac{16-6+2\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{2}-2}{16}$

$\Leftrightarrow (\cos\frac{\pi}{12})^2 = \frac{8+4\sqrt{3}}{16}$

$\Leftrightarrow (\cos\frac{\pi}{12})^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$ ou $\cos\frac{\pi}{12} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ car $\cos\frac{\pi}{12} > 0$ → *On peut démontrer que $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ a pour valeur exacte $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.*

c)

- *Dans la table de 12 , -71 est juste avant -72 .*

Donc $-\frac{71\pi}{12}$ peut s'écrire $-\frac{72\pi}{12}+\frac{\pi}{12}$ avec $-\frac{72\pi}{12}$ qui fait -6π .

$\cos(-\frac{71\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{12}-6\pi)$

$= \cos\frac{\pi}{12}$

$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

- *Dans la table de 12 , 61 est juste après 60 .*

Donc $\frac{61\pi}{12}$ peut s'écrire $\frac{\pi}{12}+\frac{60\pi}{12}$ avec $\frac{60\pi}{12}$ qui fait 5π .

$\cos\frac{61\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{12}+5\pi)$

$= \cos(\frac{\pi}{12}+\pi+4\pi)$

$= \cos(\frac{\pi}{12}+\pi)$

$= -\cos\frac{\pi}{12}$

$= -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

---

3. **a)**

- $\cos\frac{7\pi}{5} = \cos(\frac{2\pi}{5}+\frac{5\pi}{5})$

$= \cos(\frac{2\pi}{5}+\pi)$

$= -\cos\frac{2\pi}{5}$

$= \frac{-\sqrt{5}+1}{4}$

- $\cos\frac{8\pi}{5} = \cos(-\frac{2\pi}{5}+\frac{10\pi}{5})$
  $= \cos(-\frac{2\pi}{5}+2\pi)$
  $= \cos(-\frac{2\pi}{5})$
  $= \cos\frac{2\pi}{5}$
  $= \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

- $\cos\frac{3\pi}{5} = \cos(\frac{5\pi}{5}-\frac{2\pi}{5})$
  $= \cos(\pi-\frac{2\pi}{5})$
  $= -\cos\frac{2\pi}{5}$
  $= \frac{-\sqrt{5}+1}{4}$

- $\sin\frac{9\pi}{10} = \sin(\frac{4\pi}{10}+\frac{5\pi}{10})$
  $= \sin(\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{2})$
  $= \cos\frac{2\pi}{5}$
  $= \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

b)

- $\frac{2\pi}{5}$ est entre 0 et π, donc son sinus est positif.
- $(\cos\frac{2\pi}{5})^2 + (\sin\frac{2\pi}{5})^2 = 1$

$\Leftrightarrow (\sin\frac{2\pi}{5})^2 = 1-(\cos\frac{2\pi}{5})^2$

$\Leftrightarrow (\sin\frac{2\pi}{5})^2 = 1-(\frac{\sqrt{5}-1}{4})^2$

$\Leftrightarrow (\sin\frac{2\pi}{5})^2 = 1-\frac{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}+1}{16}$

$\Leftrightarrow (\sin\frac{2\pi}{5})^2 = \frac{16-5+2\sqrt{5}-1}{16}$

$\Leftrightarrow (\sin\frac{2\pi}{5})^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$

$\Leftrightarrow \sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$ ou $\sin\frac{2\pi}{5} = -\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$

$\Leftrightarrow \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ car $\sin\frac{2\pi}{5} > 0$

c)

- $\sin\frac{57\pi}{5} = \sin(\frac{2\pi}{5}+\frac{55\pi}{5})$
  $= \sin(\frac{2\pi}{5}+11\pi)$
  $= \sin(\frac{2\pi}{5}+\pi+10\pi)$
  $= \sin(\frac{2\pi}{5}+\pi)$
  $= -\sin\frac{2\pi}{5}$
  $= -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

- $\sin(-\frac{87\pi}{5}) = \sin(-\frac{2\pi}{5}-\frac{85\pi}{5})$
  $= \sin(-\frac{2\pi}{5}-17\pi)$
  $= \sin(-\frac{2\pi}{5}+\pi-18\pi)$
  $= \sin(-\frac{2\pi}{5}+\pi)$
  $= \sin\frac{2\pi}{5}$
  $= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

4. ***a)*** $\cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) = -\cos x - \cos x$

$= -2\cos x$

b) $\sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) = -\sin x + \sin x$

$= 0$

c) $\cos(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x + \cos x$

$= 0$

d) $\sin(\pi - x) - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x - \sin x$

$= 0$

e) $\sin(x + 3\pi) + \sin(x + 4\pi) + \sin(x + 5\pi) + \sin(x + 6\pi) = \sin(x + \pi + 2\pi) + \sin x + \sin(x + \pi + 4\pi) + \sin x$

$= \sin(x + \pi) + \sin x + \sin(x + \pi) + \sin x$

$= -\sin x + \sin x - \sin x + \sin x$

$= 0$

f) $\cos(x + 3\pi) - \cos(x + 4\pi) + \cos(x + 5\pi) - \cos(x + 6\pi) = \cos(x + \pi + 2\pi) - \cos x + \cos(x + \pi + 4\pi) - \cos x$

$= \cos(x + \pi) - \cos x + \cos(x + \pi) - \cos x$

$= -\cos x - \cos x - \cos x - \cos x$

$= -4\cos x$

g) $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{4\pi}{4}$

$= \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{4} + \sin\pi$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0$

$= \sqrt{2} + 1$

h) $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{3\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3}$

$= \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\pi + \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

i) $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = \sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{2\pi}{6} + \sin\frac{3\pi}{6} + \sin\frac{4\pi}{6}$

$= \sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{2\pi}{3}$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{3}{2} + \sqrt{3}$

---

5. ***a)*** $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}$

$= \frac{-\sin x}{\cos x}$

$= -\frac{\sin x}{\cos x}$

$= -\tan x$

b) $\tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}$

$= \dfrac{-\sin x}{-\cos x}$

$= \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$= \tan x$

c) $\tan(\pi - x) = \dfrac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)}$

$= \dfrac{\sin x}{-\cos x}$

$= -\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$= -\tan x$

d) $\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$

$= \dfrac{\cos x}{-\sin x}$

$= -\dfrac{\cos x}{\sin x}$

$= -\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{\cos x}}$

$= -\dfrac{1}{\tan x}$