Correction de SOS MATH 1ère S – TRIGONOMÉTRIE - Fiche 2

Cette fiche comporte beaucoup de questions, et chaque correction est assez longue.
Vous pouvez utiliser les liens ci-dessous pour vous déplacer dans la fiche :

1. a) b) c) d) e) f) g)

2. a) b) c) d)

3. a) b) c) d) e)

1. ***a)*** Résolution dans $\mathbb{R}$:

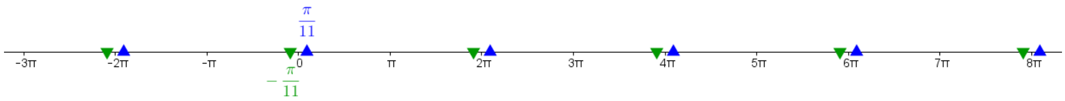
$$\cos x = \cos\frac{\pi}{11}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{11} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{11} + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z}.$$

→ *La barre sur la gauche clarifie la présentation mais n'a rien d'officiel... Et surtout... pas d'accolade !*

Donc, les solutions sont tous les réels de la forme $\dfrac{\pi}{11} + 2k\pi$ ou de la forme $-\dfrac{\pi}{11} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

On voit ci-dessous en bleu tous les réels de la forme $\dfrac{\pi}{11} + 2k\pi$, qui vont de 2π en 2π, et en vert tous les réels de la forme $-\dfrac{\pi}{11} + 2k\pi$.



Résolution dans $[\,0\,;2\pi\,[$:

Pour la première forme :

$$k = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{11} \in [\,0\,;2\pi\,[$$

Pour la deuxième forme :

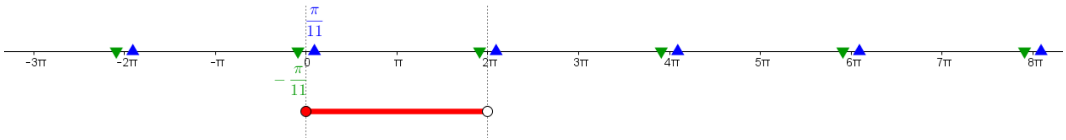
$$k = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{\pi}{11} \notin [\,0\,;2\pi\,[$$

$$k = 1 \;\Rightarrow\; x = -\frac{\pi}{11} + 2\pi = \frac{21\pi}{11} \in [\,0\,;2\pi\,[$$

→ *On **ajoute** 2π car $-\dfrac{\pi}{11}$ est inférieur à 0.*

Donc, les solutions dans $[\,0\,;2\pi\,[$ sont $\dfrac{\pi}{11}$ et $\dfrac{21\pi}{11}$.

On voit ci-dessous la seule solution bleue et la seule solution verte dans l'intervalle $[\,0\,;2\pi\,[$:



Résolution dans $]-\pi\,;\pi\,]$:

Pour la première forme :

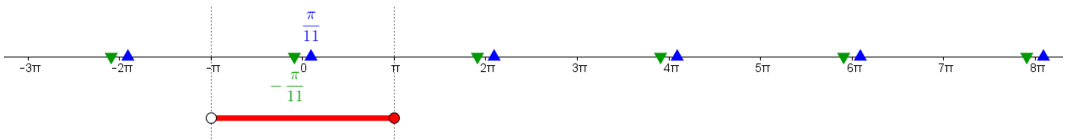
$$k = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{11} \in\,]-\pi\,;\pi\,]$$

Pour la deuxième forme :

$$k = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{\pi}{11} \in\,]-\pi\,;\pi\,]$$

Donc, les solutions dans $]-\pi\,;\pi\,]$ sont $\dfrac{\pi}{11}$ et $-\dfrac{\pi}{11}$.

On voit ci-dessous la seule solution bleue et la seule solution verte dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi\,]$:



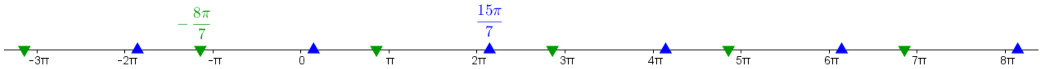
b) Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$\sin x \;=\; \sin \frac{15\pi}{7}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{15\pi}{7} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{15\pi}{7} + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{15\pi}{7} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{8\pi}{7} + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Donc, les solutions sont tous les réels de la forme $\dfrac{15\pi}{7} + 2k\pi$ ou de la forme $-\dfrac{8\pi}{7} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

On voit ci-dessous en bleu tous les réels de la forme $\dfrac{15\pi}{7} + 2k\pi$ et en vert tous les réels de la forme $-\dfrac{8\pi}{7} + 2k\pi$.



Résolution dans $[\,0\,;\,2\pi\,[$:

Pour la première forme :

$k = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{15\pi}{7} \notin [\,0\,;\,2\pi\,[$

$k = -1 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{15\pi}{7} - 2\pi = \dfrac{\pi}{7} \in [\,0\,;\,2\pi\,[$ $\longrightarrow$ On **soustrait** 2π car $\dfrac{15\pi}{7}$ est supérieur à 2π .

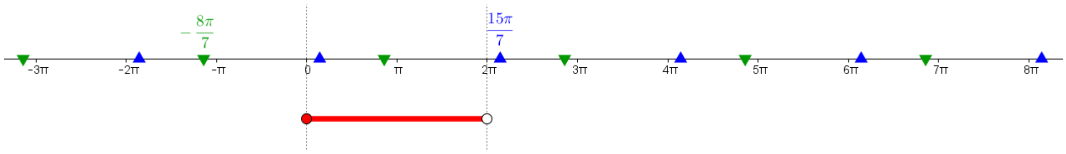
Pour la deuxième forme :

$k = 0 \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{8\pi}{7} \notin [\,0\,;\,2\pi\,[$

$k = 1 \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{8\pi}{7} + 2\pi = \dfrac{6\pi}{7} \in [\,0\,;\,2\pi\,[$ $\longrightarrow$ On **ajoute** 2π car $-\dfrac{8\pi}{7}$ est inférieur à 0 .

Donc, les solutions dans $[\,0\,;\,2\pi\,[$ sont $\dfrac{\pi}{7}$ et $\dfrac{6\pi}{7}$.

On voit ci-dessous la seule solution bleue et la seule solution verte dans l'intervalle $[\,0\,;\,2\pi\,[$:



Résolution dans $]\,-\pi\,;\,\pi\,]$:

Pour la première forme :

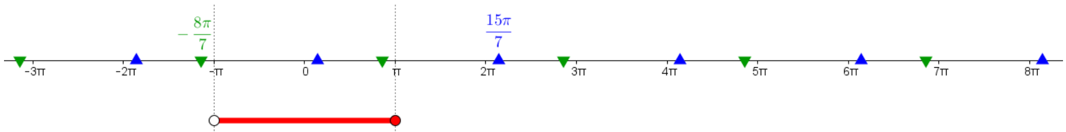
$k = -1 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{7} \in\,]\,-\pi\,;\,\pi\,]$

Pour la deuxième forme :

$k = 1 \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{8\pi}{7} + 2\pi = \dfrac{6\pi}{7} \in\,]\,-\pi\,;\,\pi\,]$

Donc, les solutions dans $]\,-\pi\,;\,\pi\,]$ sont $\dfrac{\pi}{7}$ et $\dfrac{6\pi}{7}$.

On voit ci-dessous la seule solution bleue et la seule solution verte dans l'intervalle $]\,-\pi\,;\,\pi\,]$:



Le hasard fait que ce sont les mêmes que dans l'intervalle $[\,0\,;\,2\pi\,[$.

c) Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{5\pi}{6}$ $\longrightarrow$ On aurait pu choisir $\cos\frac{7\pi}{6}$ qui vaut aussi $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, on obtiendrait les mêmes solutions (voir Remarque).

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Donc, les solutions sont tous les réels de la forme $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou de la forme $-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque : Dans l'infinité des $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, on peut remplacer $\frac{5\pi}{6}$ par $\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{7\pi}{6}$.

Dans l'infinité des $-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, on peut remplacer $-\frac{5\pi}{6}$ par $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6}$.

On peut alors écrire que les solutions sont tous les réels de la forme $-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ou de la forme $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

C'est ce qu'on aurait trouvé en choisissant au départ $\frac{7\pi}{6}$ au lieu de $\frac{5\pi}{6}$.

Résolution dans $[0 ; 2\pi[$:

Pour la première forme :

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \in [0 ; 2\pi[$

Pour la deuxième forme :

$k = 0 \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{6} \notin [0 ; 2\pi[$

$k = 1 \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6} \in [0 ; 2\pi[$

Donc, les solutions dans $[0 ; 2\pi[$ sont $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$.

Résolution dans $]-\pi ; \pi]$:

Pour la première forme :

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \in]-\pi ; \pi]$

Pour la deuxième forme :

$k = 0 \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{6} \in]-\pi ; \pi]$

Donc, les solutions dans $]-\pi ; \pi]$ sont $\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$.

d) Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Donc, les solutions sont tous les réels de la forme $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou de la forme $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Résolution dans $[0 ; 2\pi[$:

Pour la première forme :

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \in [0 ; 2\pi[$

Pour la deuxième forme :

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \in [0 ; 2\pi[$

Donc, les solutions dans $[0 ; 2\pi[$ sont $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

Résolution dans $]-\pi ; \pi]$:

Pour la première forme :

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \in]-\pi ; \pi]$

Pour la deuxième forme :

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \in]-\pi ; \pi]$

Donc, les solutions dans $]-\pi ; \pi]$ sont $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

e) Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$\longrightarrow$ On aurait pu choisir $\cos\frac{5\pi}{4}$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Donc, les solutions sont tous les réels de la forme $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou de la forme $-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Résolution dans $[\,0\,;2\pi\,[$:

Pour la première forme :

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \in [\,0\,;2\pi\,[$

Pour la deuxième forme :

$k = 0 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{4} \notin [\,0\,;2\pi\,[$

$k = 1 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4} \in [\,0\,;2\pi\,[$

Donc, les solutions dans $[\,0\,;2\pi\,[$ sont $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$.

Résolution dans $]-\pi\,;\pi\,]$:

Pour la première forme :

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \in\,]-\pi\,;\pi\,]$

Pour la deuxième forme :

$k = 0 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{4} \in\,]-\pi\,;\pi\,]$

Donc, les solutions dans $]-\pi\,;\pi\,]$ sont $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$.

f) Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Donc, les solutions sont tous les réels de la forme $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou de la forme $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Résolution dans $[\,0\,;2\pi\,[$:

Pour la première forme :

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [\,0\,;2\pi\,[$

Pour la deuxième forme :

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \in [\,0\,;2\pi\,[$

Donc, les solutions dans $[\,0\,;2\pi\,[$ sont $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

Résolution dans $]-\pi\,;\pi\,]$:

Pour la première forme :

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in\,]-\pi\,;\pi\,]$

Pour la deuxième forme :

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \in\,]-\pi\,;\pi\,]$

Donc, les solutions dans $]-\pi\,;\pi\,]$ sont $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

g) Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$$

→ On aurait pu choisir $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, mais cela n'aurait aucun intérêt...

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Donc, les solutions sont tous les réels de la forme $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou de la forme $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Résolution dans $[\,0\,;2\pi\,[$:

Pour la première forme :

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in [\,0\,;2\pi\,[$

Pour la deuxième forme :

$k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} \notin [\,0\,;2\pi\,[$

$k = 1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \in [\,0\,;2\pi\,[$

Donc, les solutions dans $[\,0\,;2\pi\,[$ sont $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

Résolution dans $]-\pi\,;\pi\,]$:

Pour la première forme :

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in\,]-\pi\,;\pi\,]$

Pour la deuxième forme :

$k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} \in\,]-\pi\,;\pi\,]$

Donc, les solutions dans $]-\pi\,;\pi\,]$ sont $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

---

2. ***a)*** Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$(\cos x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \text{ ou } \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos 0 \text{ ou } \cos x = \cos\pi$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -0 + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\pi + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z}$$

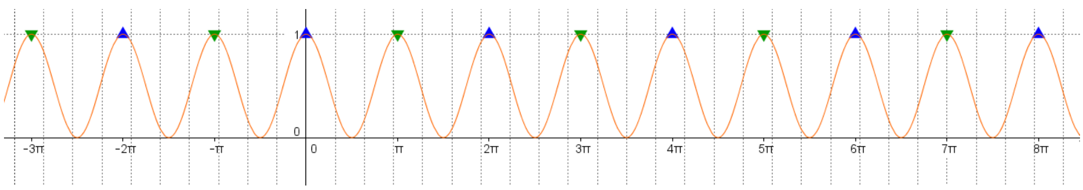
On voit bien que 0 et -0, c'est pareil...
Mais avez-vous vu que π et $-\pi$ sont aussi égaux ? Modulo 2π !

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi \text{, avec } k \in \mathbb{Z}.$$

→ Inutile d'écrire « $0 + 2k\pi$ » et un seul « avec $k \in \mathbb{Z}$ » suffit.

Donc, les solutions sont tous les réels de la forme $2k\pi$ ou de la forme $\pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si on trace sur GeoGebra la courbe de la fonction $x \mapsto (\cos x)^2$, on voit qu'elle coupe la droite $y = 1$ aux points dont les abscisses sont les solutions $2k\pi$ et les solutions $\pi + 2k\pi$:



Mais on voit bien que ce sont finalement tous les réels qui vont de π en π en partant de 0. On peut donc conclure aussi :

Donc, les solutions sont tous les réels de la forme $k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Résolution dans $[\,0\,;2\pi\,[$:

Pour la première forme :

$k = 0 \Rightarrow x = 0 \in [\,0\,;2\pi\,[$

Pour la deuxième forme :

$k = 0 \Rightarrow x = \pi \in [\,0\,;2\pi\,[$

Donc, les solutions dans $[\,0\,;2\pi\,[$ sont 0 et π.

Résolution dans $]-\pi\,;\pi\,]$:

Pour la première forme :

$k = 0 \Rightarrow x = 0 \in\,]-\pi\,;\pi\,]$

Pour la deuxième forme :

$k = 0 \Rightarrow x = \pi \in\,]-\pi\,;\pi\,]$

Donc, les solutions dans $]-\pi\,;\pi\,]$ sont 0 et π.

b) Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$(\sin x)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } \sin x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4} \text{ ou } \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Donc, les solutions sont tous les réels de la forme $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, ou de la forme $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, ou de la forme $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou de la forme $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Résolution dans $[\,0\,;\,2\pi\,[$:

Pour la première forme :

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [\,0\,;\,2\pi\,[$$

Pour la deuxième forme :

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \in [\,0\,;\,2\pi\,[$$

Pour la troisième forme :

$$k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \notin [\,0\,;\,2\pi\,[$$

$$k = 1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4} \in [\,0\,;\,2\pi\,[$$

Pour la quatrième forme :

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \in [\,0\,;\,2\pi\,[$$

Donc, les solutions dans $[\,0\,;\,2\pi\,[$ sont $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$. → *Rangées dans l'ordre croissant, mais aucune importance…*

Résolution dans $]-\pi\,;\,\pi\,]$:

Pour la première forme :

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \,]-\pi\,;\,\pi\,]$$

Pour la deuxième forme :

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \in \,]-\pi\,;\,\pi\,]$$

Pour la troisième forme :

$$k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \in \,]-\pi\,;\,\pi\,]$$

Pour la quatrième forme :

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \notin \,]-\pi\,;\,\pi\,]$$

$$k = -1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4} \in \,]-\pi\,;\,\pi\,]$$

Donc, les solutions dans $]-\pi\,;\,\pi\,]$ sont $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

c) Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$(\cos x)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } \cos x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{4} \text{ ou } \cos x = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z}\text{ .}$$

→ Il n'y a plus rien à faire...
On pourrait réunir les quatre formes en une seule colonne,
mais ce serait une perte de temps.

Donc, les solutions sont tous les réels de la forme $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, ou de la forme $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, ou de la forme $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou de la forme $-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

On remarque que ce sont exactement les mêmes solutions que pour l'équation précédente $(\sin x)^2 = \frac{1}{2}$ car $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$ sont égaux modulo 2π.

d) Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$(\sin x)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sqrt{\frac{3}{4}} \text{ ou } \sin x = -\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{3} \text{ ou } \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{Z}\text{ .}$$

Donc, les solutions sont tous les réels de la forme $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, ou de la forme $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, ou de la forme $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou de la forme $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Résolution dans $[\,0\,;2\pi\,[$:

Pour la première forme :

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in [\,0\,;2\pi\,[$$

Pour la deuxième forme :

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \in [\,0\,;2\pi\,[$$

Pour la troisième forme :

$$k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} \notin [\,0\,;2\pi\,[$$

$$k = 1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \in [\,0\,;2\pi\,[$$

Pour la quatrième forme :

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \in [\,0\,;2\pi\,[$$

Donc, les solutions dans $[\,0\,;2\pi\,[$ sont $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

Résolution dans $]-\pi\,;\,\pi\,]$:

Pour la première forme :

$$k=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{3}\in\,]-\pi\,;\,\pi\,]$$

Pour la deuxième forme :

$$k=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{2\pi}{3}\in\,]-\pi\,;\,\pi\,]$$

Pour la troisième forme :

$$k=0 \;\Rightarrow\; x=-\frac{\pi}{3}\in\,]-\pi\,;\,\pi\,]$$

Pour la quatrième forme :

$$k=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{4\pi}{3}\notin\,]-\pi\,;\,\pi\,]$$

$$k=-1 \;\Rightarrow\; x=\frac{4\pi}{3}-2\pi=-\frac{2\pi}{3}\in\,]-\pi\,;\,\pi\,]$$

Donc, les solutions dans $]-\pi\,;\,\pi\,]$ sont $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

---

3. ***a)*** Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$\cos 2x \;=\; \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=x+\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x=-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi \end{array}\right.,\ \text{avec } k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right.,\ \text{avec } k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3} \end{array}\right.,\ \text{avec } k\in\mathbb{Z}$$

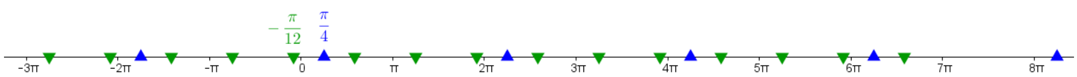
éliminations des x de droite

divisions par 3

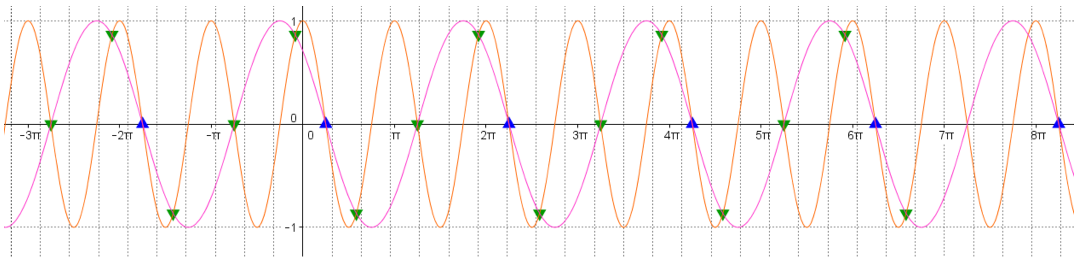
Ne pas oublier de diviser aussi les 2kπ !!!

Donc, les solutions sont tous les réels de la forme $\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou de la forme $-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

On voit ci-dessous en bleu tous les réels de la forme $\frac{\pi}{4}+2k\pi$, qui vont de 2π en 2π, et en vert tous les réels de la forme $-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$, qui vont de $\frac{2\pi}{3}$ en $\frac{2\pi}{3}$:



Si on trace sur GeoGebra les courbes des fonctions $x\mapsto\cos 2x$ et $x\mapsto\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, on voit qu'elles se coupent en deux séries de points d'intersection, une série bleue dont les abscisses sont les solutions $\frac{\pi}{4}+2k\pi$ et une série verte dont les abscisses sont les solutions $-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$.



Résolution dans $[\,0\,;\,2\pi\,[$:

Pour la première forme :

$$k = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{4} \in [\,0\,;\,2\pi\,[$$

Pour la deuxième forme :

$$k = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{\pi}{12} \notin [\,0\,;\,2\pi\,[$$

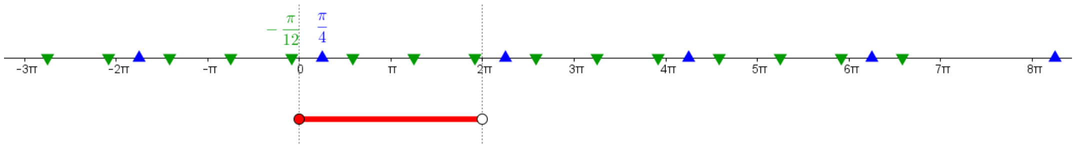
$$k = 1 \;\Rightarrow\; x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} \in [\,0\,;\,2\pi\,[$$

$$k = 2 \;\Rightarrow\; x = -\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = \frac{5\pi}{4} \in [\,0\,;\,2\pi\,[$$

$$k = 3 \;\Rightarrow\; x = -\frac{\pi}{12} + \frac{6\pi}{3} = \frac{23\pi}{12} \in [\,0\,;\,2\pi\,[$$

Donc, les solutions dans $[\,0\,;\,2\pi\,[$ sont $\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{23\pi}{12}$.

On voit ci-dessous la seule solution bleue et les **trois solutions vertes** dans l'intervalle $[\,0\,;\,2\pi\,[$:



Résolution dans $]-\pi\,;\,\pi\,]$:

Pour la première forme :

$$k = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{4} \in\,]-\pi\,;\,\pi\,]$$

Pour la deuxième forme :

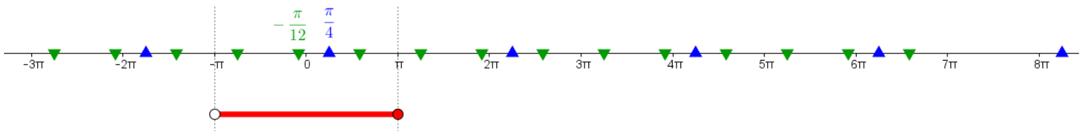
$$k = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{\pi}{12} \in\,]-\pi\,;\,\pi\,]$$

$$k = 1 \;\Rightarrow\; x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} \in\,]-\pi\,;\,\pi\,]$$

$$k = -1 \;\Rightarrow\; x = -\frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{3\pi}{4} \in\,]-\pi\,;\,\pi\,]$$

Donc, les solutions dans $]-\pi\,;\,\pi\,]$ sont $\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{12}$ et $-\frac{3\pi}{4}$.

On voit ci-dessous la seule solution bleue et les **trois solutions vertes** dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi\,]$:



b) Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$\sin x \;=\; \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

changements de signes

Soustraire les $2k\pi$ ou les ajouter revient au même…

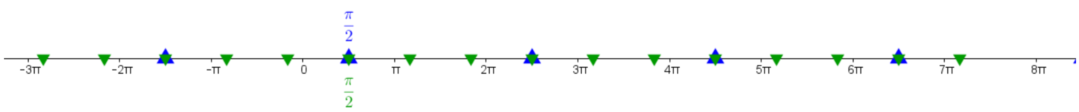
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 2k\pi \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} -x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} - 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

divisions par 3

Je vous montre le graphique des solutions avant de conclure car je crains que vous n'ayez pas réalisé ce qui se passe…

Tous les réels bleus de la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, qui vont de 2π en 2π, font partie de tous les réels verts de la forme $\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$, qui vont de $\frac{2\pi}{3}$ en $\frac{2\pi}{3}$

(ce sont les $\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$ pour lesquels k est un multiple de 3). On peut donc grouper les deux formes en une seule :



Donc, les solutions sont tous les réels de la forme $\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Résolution dans $[\,0\,;\,2\pi\,[$:

$$k = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} \in [\,0\,;\,2\pi\,[$$

$$k = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} \in [\,0\,;\,2\pi\,[$$

$$k = 2 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} \in [\,0\,;\,2\pi\,[$$

Donc, les solutions dans $[\,0\,;\,2\pi\,[$ sont $\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$.

Résolution dans $]-\pi\,;\,\pi\,]$:

$k=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2} \in\,]-\pi\,;\,\pi\,]$

$k=-1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{6} \in\,]-\pi\,;\,\pi\,]$

$k=-2 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{3}=-\frac{5\pi}{6} \in\,]-\pi\,;\,\pi\,]$

Donc, les solutions dans $]-\pi\,;\,\pi\,]$ sont $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$.

Inutile d'écrire $0+2k\pi$ ...

c) Résolution dans $\mathbb{R}$:

$\sin 3x \;=\; \sin 2x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=2x+2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x=\pi-2x+2k\pi \end{array}\right., \text{ avec } k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=2k\pi \\ \text{ou} \\ 5x=\pi+2k\pi \end{array}\right., \text{ avec } k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=2k\pi \\ \text{ou} \\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5} \end{array}\right., \text{ avec } k\in\mathbb{Z}$$

Donc, les solutions sont tous les réels de la forme $2k\pi$ ou de la forme $\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

Résolution dans $[\,0\,;\,2\pi\,[$:

Pour la première forme :

$k=0 \Rightarrow x=0 \in [\,0\,;\,2\pi\,[$

Pour la deuxième forme :

$k=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{5} \in [\,0\,;\,2\pi\,[$

$k=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}=\frac{3\pi}{5} \in [\,0\,;\,2\pi\,[$

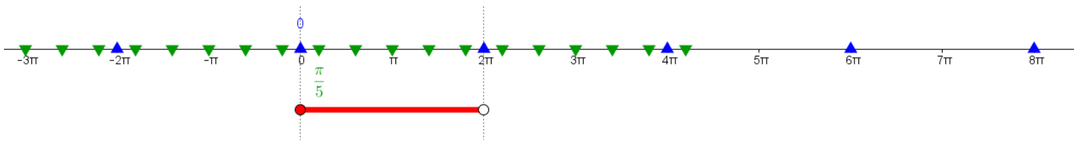
$k=2 \Rightarrow x=\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}=\pi \in [\,0\,;\,2\pi\,[$

$k=3 \Rightarrow x=\frac{\pi}{5}+\frac{6\pi}{5}=\frac{7\pi}{5} \in [\,0\,;\,2\pi\,[$

$k=4 \Rightarrow x=\frac{\pi}{5}+\frac{8\pi}{5}=\frac{9\pi}{5} \in [\,0\,;\,2\pi\,[$

Donc, les solutions dans $[\,0\,;\,2\pi\,[$ sont 0 ; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{3\pi}{5}$; π ; $\frac{7\pi}{5}$ et $\frac{9\pi}{5}$.

On voit ci-dessous la seule solution bleue (attention ! $2\pi \notin [\,0\,;\,2\pi\,[$) et les **cinq solutions vertes** dans l'intervalle $[\,0\,;\,2\pi\,[$:



Résolution dans $]-\pi\,;\,\pi\,]$:

Pour la première forme :

$k=0 \Rightarrow x=0 \in\,]-\pi\,;\,\pi\,]$

Pour la deuxième forme :

$k=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{5} \in\,]-\pi\,;\,\pi\,]$

$k=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}=\frac{3\pi}{5} \in\,]-\pi\,;\,\pi\,]$

$k=2 \Rightarrow x=\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}=\pi \in\,]-\pi\,;\,\pi\,]$

$k=-1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}=-\frac{\pi}{5} \in\,]-\pi\,;\,\pi\,]$

$k=-2 \Rightarrow x=\frac{\pi}{5}-\frac{4\pi}{5}=-\frac{3\pi}{5} \in\,]-\pi\,;\,\pi\,]$

Donc, les solutions dans $]-\pi\,;\,\pi\,]$ sont 0 ; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{3\pi}{5}$; π ; $-\frac{\pi}{5}$ et $-\frac{3\pi}{5}$.

d) Résolution dans $\mathbb{R}$:

$\cos 3x \;=\; \cos 2x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=2x+2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x=-2x+2k\pi \end{array}\right., \text{ avec } k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=2k\pi \\ \text{ou} \\ 5x=2k\pi \end{array}\right., \text{ avec } k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=2k\pi \\ \text{ou} \\ x=\frac{2k\pi}{5} \end{array}\right., \text{ avec } k\in\mathbb{Z}$$

Donc, les solutions sont tous les réels de la forme $\frac{2k\pi}{5}$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

Tous les réels de la forme $2k\pi$ font partie de tous les réels de la forme $\frac{2k\pi}{5}$ (ce sont ceux pour lesquels k est un multiple de 5).

Résolution dans $[\, 0 \,;\, 2\pi \,[$:

Pour k prenant les valeurs de 0 à 4, on obtient les solutions dans $[\, 0 \,;\, 2\pi \,[$ qui sont 0 ; $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{4\pi}{5}$; $\frac{6\pi}{5}$ et $\frac{8\pi}{5}$.

Résolution dans $]\, -\pi \,;\, \pi \,]$:

Pour k prenant les valeurs de -2 à 2, on obtient les solutions dans $]\, -\pi \,;\, \pi \,]$ qui sont $-\frac{4\pi}{5}$; $-\frac{2\pi}{5}$; 0 ; $\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}$.

Vous avez le droit de sentir une certaine lassitude à détailler les solutions à condition d'en avoir fait plein... Comme moi...

e) Résolution dans $\mathbb{R}$:

$$\sin x = \sin(x + \pi)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x + \pi + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - (x + \pi) + 2k\pi \end{array}\right., \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 = \pi + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = 2k\pi \end{array}\right., \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow x = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, car $0 = \pi + 2k\pi$ est impossible.

Donc, les solutions sont tous les réels de la forme $k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Résolution dans $[\, 0 \,;\, 2\pi \,[$:

Pour k prenant les valeurs de 0 et 1, on obtient les solutions dans $[\, 0 \,;\, 2\pi \,[$ qui sont 0 et π.

Résolution dans $]\, -\pi \,;\, \pi \,]$:

Pour k prenant les valeurs de 0 et 1, on obtient les solutions dans $]\, -\pi \,;\, \pi \,]$ qui sont 0 et π.