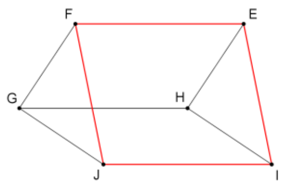
Correction de SOS MATH 1ère S - VECTEURS - Fiche 1

1.

- $EFGH$ parallélogramme $\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$
- $GHIJ$ parallélogramme $\Rightarrow \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{IJ}$
- $\begin{cases} \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG} \\ \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{IJ} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{IJ}$ → *Un grand classique : Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$, alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w}$.*

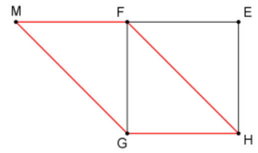
$\Rightarrow$ $EFJI$ parallélogramme



---

2. $\begin{cases} EFGH \text{ carré} \Rightarrow EFGH \text{ parallélogramme} \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG} \\ M \text{ symétrique de } E \text{ par rapport à } F \Rightarrow F \text{ milieu de } [EM] \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FM} \end{cases}$ → *"Symétrique" fait penser à "milieu" puis à "égalité vectorielle".*

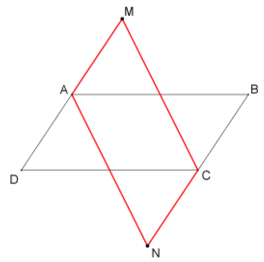
donc $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{FM}$
donc $FMGH$ parallélogramme.



---

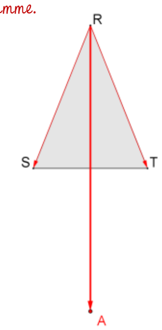
3. $\begin{cases} ABCD \text{ parallélogramme} \Rightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} \\ M \text{ symétrique de } D \text{ par rapport à } A \Rightarrow A \text{ milieu de } [DM] \Rightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AM} \\ N \text{ symétrique de } B \text{ par rapport à } C \Rightarrow C \text{ milieu de } [NB] \Rightarrow \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{CB} \end{cases}$ → *Le "grand classique" mais à quatre vecteurs !*

donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$
donc $AMCN$ parallélogramme.



4.

- $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RA} \Rightarrow RSAT$ parallélogramme → *Pour démontrer losanges, rectangles et carrés, commencer par démontrer le parallélogramme.*
- RST isocèle en $R \Rightarrow RS = RT$
- $\begin{cases} RSAT \text{ parallélogramme} \\ RS = RT \end{cases} \Rightarrow RSAT$ losange → *Il suffit de deux côtés consécutifs isométriques pour que le parallélogramme devienne losange.*

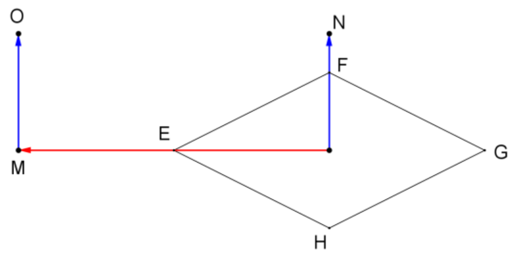


5.

- $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{\Omega N} \Rightarrow \Omega MON$ parallélogramme → *Pour démontrer losanges, rectangles et carrés, commencer par démontrer le parallélogramme.*
- $EFGH$ losange $\Rightarrow$ les diagonales sont perpendiculaires $\Rightarrow (\Omega E) \perp (\Omega F)$

$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega M} = 2\,\overrightarrow{\Omega E} \Rightarrow \overrightarrow{\Omega M} \text{ et } \overrightarrow{\Omega E} \text{ colinéaires} \Rightarrow \Omega, E \text{ et } M \text{ alignés} \\ \overrightarrow{\Omega N} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{\Omega F} \Rightarrow \overrightarrow{\Omega N} \text{ et } \overrightarrow{\Omega F} \text{ colinéaires} \Rightarrow \Omega, F \text{ et } N \text{ alignés} \end{cases}$ et donc $(\Omega M) \perp (\Omega N)$

- $\begin{cases} \Omega MON \text{ parallélogramme} \\ (\Omega M) \perp (\Omega N) \end{cases} \Rightarrow \Omega MON$ rectangle → *Il suffit d'un angle droit pour que le parallélogramme devienne rectangle.*



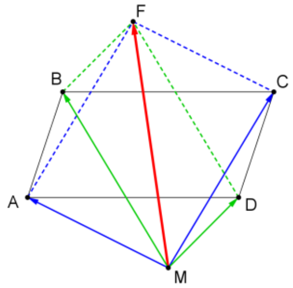
---

6. *Pour démontrer que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, on peut démontrer que $\mathcal{A} - \mathcal{B} = 0$.*

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) - (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM} \\
&= (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC}) \\
&= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} \\
&= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \quad \text{car } ABCD \text{ parallélogramme} \\
&= \vec{0}
\end{aligned}$$

→ Je me débarrasse des signes - en " inversant les lettres ".
→ Je dois voir les relations de Chasles.
→ Le fait que ABCD soit un parallélogramme ne doit pas être oublié…

Donc : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.



7. ***1ère méthode*** *: en démontrant que $\mathcal{A} - \mathcal{B} = 0$*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} - 4\overrightarrow{MO} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + 4\overrightarrow{OM} \\
&= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD} \\
&= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}
\end{aligned}$$

→ J'applique quatre fois la relation de Chasles.

Or :

$$ABCD \text{ parallélogramme de centre } O \Rightarrow \begin{cases} O \text{ milieu de } [AC] \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \\ O \text{ milieu de } [BD] \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} - 4\overrightarrow{MO} = \vec{0}$$

Et donc :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$$

2ème méthode *: en partant simplement de $\mathcal{A}$ pour arriver à $\mathcal{B}$*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}) \\
&= 4\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}
\end{aligned}$$

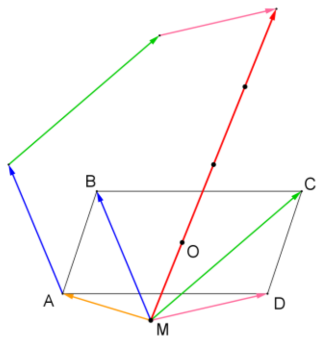
→ J'applique quatre fois la relation de Chasles "à l'envers" pour créer les quatre $\overrightarrow{MO}$.

Or :

$$ABCD \text{ parallélogramme de centre } O \Rightarrow \begin{cases} O \text{ milieu de } [AC] \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \\ O \text{ milieu de } [BD] \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$$

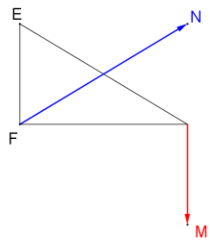


Pour construire la somme $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$, on a préféré les vecteurs consécutifs.
On voit bien que cette somme vaut $4\overrightarrow{MO}$.

8. $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FN} \Rightarrow EFGN$ parallélogramme $\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NG}$

→ Je reconnais la somme de vecteurs de même origine qui me donne un parallélogramme.

$$\begin{cases} \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NG} \\ \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{EF} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{NG} = \overrightarrow{GM} \Rightarrow G \text{ milieu de } [MN].$$

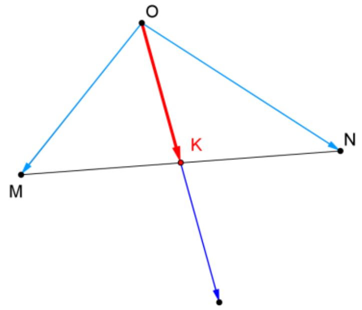


9.

- $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
  donc $ABCR$ parallélogramme
  donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{RA}$.
- $\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$
  donc $ACBS$ parallélogramme
  donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AS}$
- $\begin{cases} \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AS} \\ \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{RA} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{RA} = \overrightarrow{AS} \Rightarrow A$ milieu de $[RS]$.

---

10. 1ère méthode



$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA}$ où A est le point tel que $OMAN$ parallélogramme

$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

Donc, K milieu de la diagonale $[OA]$,
donc, K milieu de la diagonale $[MN]$.

2ème méthode

Ce procédé sera très utilisé dans les exercices qui suivront, en particulier ceux dans lesquels on doit démontrer une colinéarité.

Je pars du vecteur $\overrightarrow{MK}$ qui, d'après la question, doit nécessairement être égal à $\overrightarrow{KN}$ ou alors à $\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ pour que K soit bien le milieu de $[MN]$.

$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OK}$ → Puis, grâce à " Chasles à l'envers ", je fais apparaître $\overrightarrow{OK}$ qui est donné dans l'énoncé.

$= \overrightarrow{MO} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})$ → Je le remplace par son expression, puis je laisse "vivre" le calcul tout seul, il va m'amener au bon vecteur.

$= \overrightarrow{MO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ON}$ → Je développe.

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{MO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ON}$ → Car $\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$ vaut $-\frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$.

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON})$ → Je factorise.

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ → Et " Chasles à l'endroit "...

Donc K milieu de $[MN]$.

Cela paraît plus long que la 1ère méthode, mais, une fois qu'on a eu les deux idées de partir de $\overrightarrow{MK}$ et de faire apparaître $\overrightarrow{OK}$, le reste est rapide et seulement calculatoire.

---

11. Même procédé que précédemment.

- $\begin{cases} I \text{ milieu de } [AB] \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ J \text{ milieu de } [AC] \Rightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \end{cases}$
- $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$ → Je pars du vecteur $\overrightarrow{IJ}$, puis, grâce à " Chasles à l'envers ", je fais apparaître $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$.
  $= -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$
  $= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
  $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

---

12. $\overrightarrow{S'T'} = \overrightarrow{S'R} + \overrightarrow{RT'}$ → Je pars du vecteur $\overrightarrow{S'T'}$, puis, grâce à " Chasles à l'envers ", je fais apparaître $\overrightarrow{RT'}$ et l'opposé de $\overrightarrow{RS'}$.

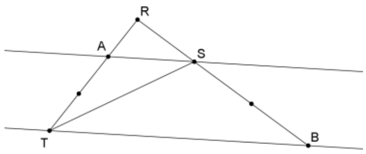
$= k\,\overrightarrow{SR} + k\,\overrightarrow{RT}$ car $\overrightarrow{RS'} = k\,\overrightarrow{RS}$

$= k\,(\overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RT})$

$= k\,\overrightarrow{ST}$

---

13. Pour démontrer ce parallélisme, on va démontrer la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{BT}$ et $\overrightarrow{SA}$.
On sait donc à l'avance que $\overrightarrow{BT}$ peut s'écrire ... $\overrightarrow{SA}$ ou que $\overrightarrow{SA}$ peut s'écrire ... $\overrightarrow{BT}$.
Il vaut mieux partir de $\overrightarrow{BT}$ qui est le plus long des deux.



$\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RT}$ → Grâce à " Chasles à l'envers ", je fais apparaître d'un seul coup $\overrightarrow{RB}$ (en fait son opposé) et $\overrightarrow{RT}$ de l'énoncé.

$= 3\,\overrightarrow{SR} + 3\,\overrightarrow{RA}$ car $\begin{cases} \overrightarrow{RB} = 3\,\overrightarrow{RS} \\ \overrightarrow{RA} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{RT} \end{cases}$

$= 3\,(\,\overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RA}\,)$

$= 3\,\overrightarrow{SA}$

donc $\overrightarrow{BT}$ et $\overrightarrow{SA}$ colinéaires
donc $(BT) \,//\, (SA)$.

---

14. Partons de $\overrightarrow{FJ}$.

$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FI} + \overrightarrow{IJ}$ → Grâce à " Chasles à l'envers ", je fais apparaître $\overrightarrow{IJ}$.
Il apparaît en même temps $\overrightarrow{FI}$ mais c'est très bien... L est entre F et I ...

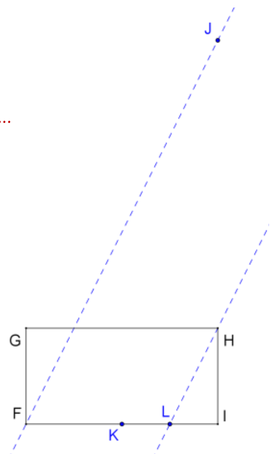
$= 2\,\overrightarrow{KI} + 4\,\overrightarrow{IH}$ car $\begin{cases} K \text{ milieu de } [FI] \\ \overrightarrow{IJ} = 4\,\overrightarrow{IH} \end{cases}$

$= 2\,(\,2\,\overrightarrow{LI}\,) + 4\,\overrightarrow{IH}$ car L milieu de $[KI]$

$= 4\,(\,\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{IH}\,)$

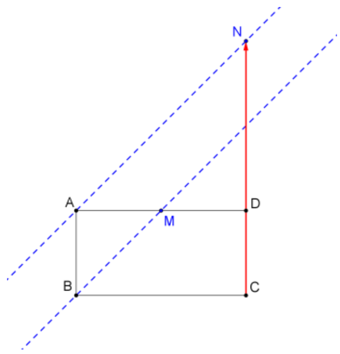
$= 4\,\overrightarrow{LH}$

donc $\overrightarrow{FJ}$ et $\overrightarrow{LH}$ colinéaires
donc $(FJ) \,//\, (LH)$.



---

15. Partons de $\overrightarrow{AN}$.
Le problème qui se pose ici est que les points qui nous intéressent sont M et C .
Or, si on crée $\overrightarrow{AM}$, on crée en même temps $\overrightarrow{MN}$ qui est "hors circuit"...
Et, si on crée $\overrightarrow{CN}$, on crée en même temps $\overrightarrow{AC}$ qui est aussi "hors circuit"...
L'astuce est de passer par l'intermédiaire d'un autre point qui joue un rôle charnière entre C et M , il s'agit de D .



$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$

$= 2\,\overrightarrow{AM} + (\,\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}\,)$ car M milieu de $[AD]$ → J'en profite pour créer $\overrightarrow{CN}$, et $\overrightarrow{DC}$ ne m'inquiète pas.

$= 2\,\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{CD} + 3\,\overrightarrow{CD}$

$= 2\,\overrightarrow{AM} + 2\,\overrightarrow{CD}$

$= 2\,(\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD}\,)$

$= 2\,(\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA}\,)$ car $ABCD$ rectangle donc parallélogramme

$= 2\,\overrightarrow{BM}$

donc $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BM}$ colinéaires
donc $(AN) \,//\, (BM)$.

Autre méthode : utiliser " Chasles à l'envers " pour créer tout un circuit passant par les points intéressants

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 3\,\overrightarrow{CD}$ car $ABCD$ rectangle donc parallélogramme

$= -\,\overrightarrow{BA} + 2\,\overrightarrow{AM} + 3\,\overrightarrow{BA}$ car $\begin{cases} M \text{ milieu de } [AD] \\ ABCD \text{ parallélogramme} \end{cases}$

$= 2\,\overrightarrow{AM} + 2\,\overrightarrow{BA}$

$= 2\,(\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\,)$

$= 2\,\overrightarrow{BM}$

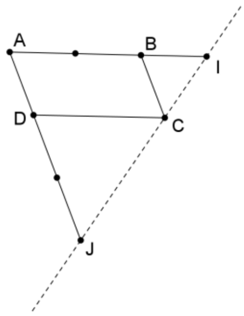
donc $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BM}$ colinéaires
donc $(AN) \,//\, (BM)$.

---

16. Pour démontrer cet alignement, on va démontrer la colinéarité de deux des vecteurs formés par les trois points I , C et J .
Il vaut mieux partir de $\overrightarrow{IJ}$ qui est le plus long.
On sait donc à l'avance qu'il peut s'écrire ... $\overrightarrow{IC}$ ou ... $\overrightarrow{CJ}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}\\ &= (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA}) + 3\,\overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{IB} + 2\,\overrightarrow{IB} + 3\,\overrightarrow{AD}\\ &= 3(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AD})\\ &= 3(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC}) \quad \text{car } ABCD \text{ parallélogramme}\\ &= 3\,\overrightarrow{IC}\end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ colinéaires
donc I , C et J sont alignés.

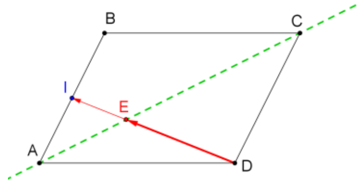


---

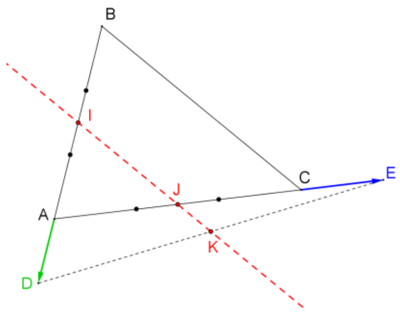
17. On va partir de $\overrightarrow{CA}$, le plus long.
Mais comme il faut que D et I interviennent, on va faire un "circuit".

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IA}\\ &= \overrightarrow{CD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \quad \text{car } \begin{cases}\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}\\ I \text{ milieu de } [AB]\end{cases}\\ &= \overrightarrow{CD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \quad \text{car } ABCD \text{ parallélogramme}\\ &= \frac{3}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE})\\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{CE}\end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CE}$ colinéaires
donc A , E et C sont alignés.



18.



Posons I , J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[DE]$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IK} &= \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DK}\\ &= (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} \quad \text{car } K \text{ milieu de } [DE]\\ &= (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE})\\ &= \overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\\ &= \overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\right) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE})\\ &= \overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 2\,\overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \quad \text{car } I \text{ milieu de } [AB]\\ &= \frac{4}{3}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{4}{3}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times 2\,\overrightarrow{AJ} \quad \text{car } J \text{ milieu de } [AC]\\ &= \frac{4}{3}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ})\\ &= \frac{4}{3}\overrightarrow{IJ}\end{aligned}$$

→ Pour que J apparaisse, il faut compter sur A et E .
→ Je décompose de nouveau pour que tout se passe sur (IA) et (AJ) .
→ Je garde précieusement $\overrightarrow{IA}$ et je pars à la recherche de $\overrightarrow{AJ}$.

donc $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ colinéaires
donc I , J et K sont alignés.