Correction de SOS MATH 1ère S - VECTEURS - Fiche 2

1. Posons $(x\,;y)$ les coordonnées de S.

→ Toujours nommer les coordonnées cherchées.

On a alors : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 0-5 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{SC}\begin{pmatrix} 7-x \\ -5-y \end{pmatrix} \end{cases}$

→ Je présente les coordonnées de deux vecteurs qui doivent être égaux, que j'ai repéré à l'avance. On aurait pu prendre $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CS}$, ou $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{BC}$, ou $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{CB}$.

$ABCS$ parallélogramme $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC}$

donc $\begin{cases} 5 = 7-x \\ -5 = -5-y \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

donc $S(2\,;0)$.

→ Toujours conclure proprement.

---

2. Posons $(x\,;y)$ les coordonnées de M.

$\overrightarrow{RM}\begin{pmatrix} x-1{,}2 \\ y-0{,}5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MS}\begin{pmatrix} -2{,}4-x \\ 1{,}7-y \end{pmatrix}$

→ Pas beaucoup de choix pour les vecteurs égaux...

M est milieu de $[RS]$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{RM} = \overrightarrow{MS}$

donc $\begin{cases} x-1{,}2 = -2{,}4-x \\ y-0{,}5 = 1{,}7-y \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = -0{,}6 \\ y = 1{,}1 \end{cases}$

donc $M(-0{,}6\,;1{,}1)$.

---

3. Posons $(x\,;y)$ les coordonnées de A'.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -90 \\ -740 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA'}\begin{pmatrix} x-35 \\ y-1\,800 \end{pmatrix}$

A' le symétrique de A par rapport à B
donc B est milieu de $[AA']$

donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA'}$

donc $\begin{cases} x-35 = -90 \\ y-1\,800 = -740 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = -55 \\ y = 1\,060 \end{cases}$

donc $A'(-55\,;1\,060)$.

---

4. Posons $(x\,;y)$ les coordonnées de M.

On a alors : $\begin{cases} \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-10 \\ y-6 \end{pmatrix} \text{ donc } 2\,\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 2x-20 \\ 2y-12 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-(-1) \\ y-7 \end{pmatrix} \text{ donc } 3\,\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} 3x+3 \\ 3y-21 \end{pmatrix} \end{cases}$

$2\,\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{BM}$

donc $\begin{cases} 2x-20 = 3x+3 \\ 2y-12 = 3y-21 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = -23 \\ y = 9 \end{cases}$

donc $M(-23\,;9)$.

---

5. Posons $(x\,;y)$ les coordonnées de N.

On a alors : $\begin{cases} \overrightarrow{NK}\begin{pmatrix}-8-x\\7-y\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{NL}\begin{pmatrix}20-x\\-12-y\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{NK}+\overrightarrow{NL}\begin{pmatrix}12-2x\\-5-2y\end{pmatrix} \\ \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}x-14\\y-(-9)\end{pmatrix} \text{ donc } 2\,\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}2x-28\\2y+18\end{pmatrix}\end{cases}$

$\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{NL}=2\,\overrightarrow{MN}$

donc $\begin{cases}12-2x=2x-28\\-5-2y=2y+18\end{cases}$

donc $\begin{cases}x=10\\y=-5{,}75\end{cases}$

donc $N(10\,;-5{,}75)$.

---

6. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

$\Leftrightarrow (k-1)(k+2)-2\times2=0$ → Soigner l'enchaînement par équivalence.

$\Leftrightarrow k^2+k-2-4=0$

$\Leftrightarrow k^2+k-6=0$

$\Delta=1^2-4\times1\times(-6)=25>0$

donc il y a deux valeurs possibles pour k qui sont $\dfrac{-1+\sqrt{25}}{2\times1}=2$ et $\dfrac{-1-\sqrt{25}}{2\times1}=-3$.

On peut vérifier la proportionnalité des coordonnées :

pour $k=2$, on a $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

pour $k=-3$, on a $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

---

7. $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\\ M\in(\Delta)\Rightarrow M(x\,;2x-1)\Rightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-8\\2x-1-(-1)\end{pmatrix} \text{ et donc } \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-8\\2x\end{pmatrix}\end{cases}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CM}$ colinéaires

$\Leftrightarrow (-2)\times2x-4\times(x-8)=0$

$\Leftrightarrow -4x-4x+32=0$

$\Leftrightarrow x=4$

On peut vérifier la proportionnalité des coordonnées :

si $x=4$, on a $y=2\times4-1=7$

et donc $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}$.

Il y a bien proportionnalité avec $\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$.

---

8. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$;$M\in\mathscr{P}\Rightarrow M(x\,;x^2)\Rightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-8\\x^2-(-1)\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-8\\x^2+1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CM}$ colinéaires

$\Leftrightarrow (-2)\times(x^2+1)-4\times(x-8)=0$

$\Leftrightarrow -2x^2-2-4x+32=0$

$\Leftrightarrow -2x^2-4x+30=0$

$\Delta=(-4)^2-4\times(-2)\times30=256>0$

donc, il y a deux valeurs pour x qui sont $\dfrac{-(-4)+\sqrt{256}}{2\times(-2)}=-5$ et $\dfrac{-(-4)-\sqrt{256}}{2\times(-2)}=3$.

On peut vérifier la proportionnalité des coordonnées :

si $x=-5$, on a $y=(-5)^2=25$ et donc $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}-13\\26\end{pmatrix}$.

si $x=3$, on a $y=3^2=9$ et donc $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}-5\\10\end{pmatrix}$.

Dans les deux cas, il y a bien proportionnalité avec $\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$.

---

9. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

$\Leftrightarrow (m+2)\times m-1\times(-2)=0$

$\Leftrightarrow m^2+2m+2=0$

$\Delta=2^2-4\times1\times2=-4<0$

donc il y n'a aucune valeur possible pour k.

Par conséquent, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont jamais colinéaires.

10. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires

$\Leftrightarrow$ $(2n + 1)\times 1 - n\times(n + 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ $-n^2 + n + 1 = 0$

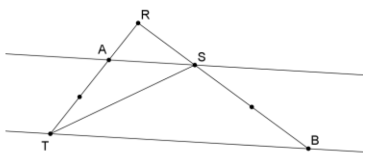
$\Delta = 1^2 - 4\times(-1)\times 1 = 5 > 0$

donc l'équation possède deux solutions $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2\times(-1)} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}61\ldots$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2\times(-1)} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61\ldots$

Or, aucune de ces deux solutions de sont entières,
donc il y n'a aucune valeur possible pour k.

Par conséquent, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont jamais colinéaires.

13. Pour démontrer ce parallélisme, on va démontrer la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{BT}$ et $\overrightarrow{SA}$.
On sait donc à l'avance que $\overrightarrow{BT}$ peut s'écrire ... $\overrightarrow{SA}$ ou que $\overrightarrow{SA}$ peut s'écrire ... $\overrightarrow{BT}$.
Il vaut mieux partir de $\overrightarrow{BT}$ qui est le plus long des deux.



$\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RT}$ → Grâce à " Chasles à l'envers ", je fais apparaître d'un seul coup $\overrightarrow{RB}$ (en fait son opposé) et $\overrightarrow{RT}$ de l'énoncé.

$= 3\,\overrightarrow{SR} + 3\,\overrightarrow{RA}$ car $\begin{cases} \overrightarrow{RB} = 3\,\overrightarrow{RS} \\ \overrightarrow{RA} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{RT} \end{cases}$

$= 3\,(\overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RA})$

$= 3\,\overrightarrow{SA}$

donc $\overrightarrow{BT}$ et $\overrightarrow{SA}$ colinéaires
donc $(BT) // (SA)$.

---

14. Partons de $\overrightarrow{FJ}$.

$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FI} + \overrightarrow{IJ}$ → Grâce à " Chasles à l'envers ", je fais apparaître $\overrightarrow{IJ}$.
Il apparaît en même temps $\overrightarrow{FI}$ mais c'est très bien... L est entre F et I ...

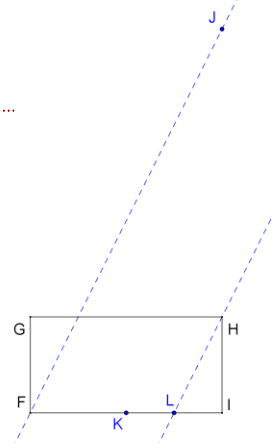
$= 2\,\overrightarrow{KI} + 4\,\overrightarrow{IH}$ car $\begin{cases} K \text{ milieu de } [FI] \\ \overrightarrow{IJ} = 4\,\overrightarrow{IH} \end{cases}$

$= 2\,(2\,\overrightarrow{LI}) + 4\,\overrightarrow{IH}$ car L milieu de $[KI]$

$= 4\,(\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{IH})$

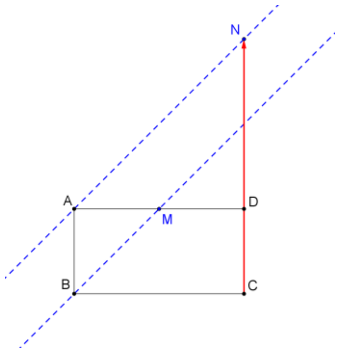
$= 4\,\overrightarrow{LH}$

donc $\overrightarrow{FJ}$ et $\overrightarrow{LH}$ colinéaires
donc $(FJ) // (LH)$.



---

15. Partons de $\overrightarrow{AN}$.
Le problème qui se pose ici est que les points qui nous intéressent sont M et C .
Or, si on crée $\overrightarrow{AM}$, on crée en même temps $\overrightarrow{MN}$ qui est "hors circuit"...
Et, si on crée $\overrightarrow{CN}$, on crée en même temps $\overrightarrow{AC}$ qui est aussi "hors circuit"...
L'astuce est de passer par l'intermédiaire d'un autre point qui joue un rôle charnière entre C et M , il s'agit de D .



$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$

$= 2\,\overrightarrow{AM} + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN})$ car M milieu de $[AD]$ → J'en profite pour créer $\overrightarrow{CN}$, et $\overrightarrow{DC}$ ne m'inquiète pas.

$= 2\,\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{CD} + 3\,\overrightarrow{CD}$

$= 2\,\overrightarrow{AM} + 2\,\overrightarrow{CD}$

$= 2\,(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD})$

$= 2\,(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA})$ car $ABCD$ rectangle donc parallélogramme

$= 2\,\overrightarrow{BM}$

donc $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BM}$ colinéaires
donc $(AN) // (BM)$.

Autre méthode : utiliser " Chasles à l'envers " pour créer tout un circuit passant par les points intéressants

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 3\,\overrightarrow{CD}$ car $ABCD$ rectangle donc parallélogramme

$= -\,\overrightarrow{BA} + 2\,\overrightarrow{AM} + 3\,\overrightarrow{BA}$ car $\begin{cases} M \text{ milieu de } [AD] \\ ABCD \text{ parallélogramme} \end{cases}$

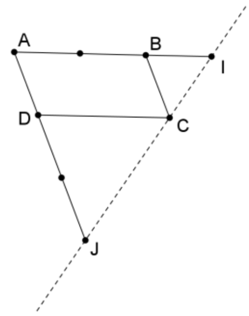
$= 2\,\overrightarrow{AM} + 2\,\overrightarrow{BA}$

$= 2\,(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM})$

$= 2\,\overrightarrow{BM}$

donc $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BM}$ colinéaires
donc $(AN) // (BM)$.

16. Pour démontrer cet alignement, on va démontrer la colinéarité de deux des vecteurs formés par les trois points I , C et J .
Il vaut mieux partir de $\overrightarrow{IJ}$ qui est le plus long.
On sait donc à l'avance qu'il peut s'écrire ... $\overrightarrow{IC}$ ou ... $\overrightarrow{CJ}$.

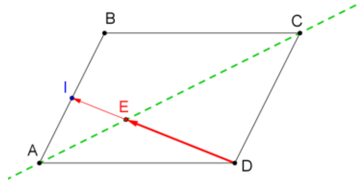


$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}\\
&= (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA}) + 3\,\overrightarrow{AD}\\
&= \overrightarrow{IB} + 2\,\overrightarrow{IB} + 3\,\overrightarrow{AD}\\
&= 3\,(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AD})\\
&= 3\,(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC}) \quad \text{car } ABCD \text{ parallélogramme}\\
&= 3\,\overrightarrow{IC}
\end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ colinéaires
donc I , C et J sont alignés.

---

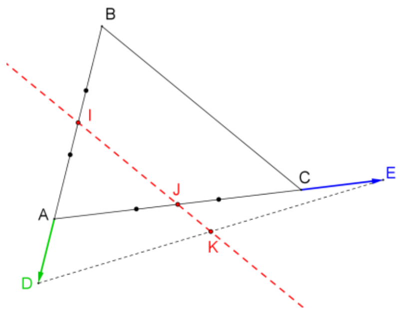
17. On va partir de $\overrightarrow{CA}$, le plus long.
Mais comme il faut que D et I interviennent, on va faire un "circuit".



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IA}\\
&= \overrightarrow{CD} + \frac{3}{2}\,\overrightarrow{DE} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA} \quad \text{car } \begin{cases} \overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{DI} \\ I \text{ milieu de } [AB] \end{cases}\\
&= \overrightarrow{CD} + \frac{3}{2}\,\overrightarrow{DE} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{CD} \quad \text{car } ABCD \text{ parallélogramme}\\
&= \frac{3}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE})\\
&= \frac{3}{2}\,\overrightarrow{CE}
\end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CE}$ colinéaires
donc A , E et C sont alignés.

18.



Posons I , J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[DE]$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IK} &= \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DK}\\
&= (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DE} \quad \text{car } K \text{ milieu de } [DE]\\
&= (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE})\\
&= \overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\\
&= \overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE})\\
&= \overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 2\,\overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}) \quad \text{car } I \text{ milieu de } [AB]\\
&= \frac{4}{3}\,\overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\,\overrightarrow{AC}\\
&= \frac{4}{3}\,\overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times 2\,\overrightarrow{AJ} \quad \text{car } J \text{ milieu de } [AC]\\
&= \frac{4}{3}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ})\\
&= \frac{4}{3}\,\overrightarrow{IJ}
\end{aligned}$$

→ Pour que J apparaisse, il faut compter sur A et E .

→ Je décompose de nouveau pour que tout se passe sur (IA) et (AJ) .

→ Je garde précieusement $\overrightarrow{IA}$ et je pars à la recherche de $\overrightarrow{AJ}$.

donc $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ colinéaires
donc I , J et K sont alignés.