Correction de SOS MATH 1ère S - VECTEURS - Fiche 3

1. $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 15-4 \\ 10-6 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 22-11 \\ 1-(-3) \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

donc $ABCD$ est un parallélogramme.

---

2. $\begin{cases} \overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} 10-(-10) \\ 2-10 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} 20 \\ -8 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} 30-10 \\ -6-2 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} 20 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases}$

donc $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{ST}$

donc S est milieu de $[RT]$.

---

3. $\begin{cases} RS = \sqrt{(2-2)^2 + (-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^2} = \sqrt{0 + 16\times 3} = \sqrt{48} \\ RT = \sqrt{(-4-2)^2 + (0 - 2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 4\times 3} = \sqrt{48} \\ ST = \sqrt{(-4-2)^2 + (0 + 2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 4\times 3} = \sqrt{48} \end{cases}$

donc RST équilatéral.

4.

- $\begin{cases} \overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} 13-1 \\ 1-(-3) \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{NM}\begin{pmatrix} 9-(-3) \\ 13-9 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{NM}\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

  donc $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$

  donc $KLMN$ parallélogramme.

- $\begin{cases} KL = \| \overrightarrow{KL} \| = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{144 + 16} = 4\sqrt{10} \\ KN = \sqrt{(-3-1)^2 + (9-(-3))^2} = \sqrt{16 + 144} = 4\sqrt{10} \end{cases}$

  donc $KL = KN$

- $\begin{cases} KM = \sqrt{(9-1)^2 + (13-(-3))^2} = \sqrt{64 + 256} = 8\sqrt{5} \\ LN = \sqrt{(-3-13)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{256 + 64} = 8\sqrt{5} \end{cases}$

  donc $KM = LN$

- $\begin{cases} KLMN \text{ parallélogramme} \\ \text{les côtés consécutifs } [KL] \text{ et } [KN] \text{ sont isométriques} \\ \text{les diagonales } [KM] \text{ et } [LN] \text{ sont isométriques} \end{cases}$

  donc $KLMN$ carré.

---

5. ***a)*** $\begin{cases} AB = \sqrt{(7-1)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} \\ AC = \sqrt{(4-1)^2 + (12-3)^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90} \\ BC = \sqrt{(4-7)^2 + (12-6)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} \end{cases}$ → On pouvait aussi calculer AB^2 , AC^2 et BC^2 .

D'une part : $AB = BC \Rightarrow ABC$ isocèle en B .

D'autre part : $\begin{cases} AB^2 + BC^2 = 45 + 45 = 90 \\ AC^2 = 90 \end{cases}$ donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$

et donc, d'après le théorème de Pythagore, ABC rectangle en B . = 90

b) ◆ ABC rectangle en B

donc l'aire de ABC vaut $\dfrac{AB\times BC}{2} = \dfrac{\sqrt{45}\times\sqrt{45}}{2} = \dfrac{45}{2}$

- ABC rectangle en B
  donc le demi-disque circonscrit a pour diamètre $[AB]$,
  donc pour rayon $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{90}}{2}$

  et donc pour aire $\frac{\pi\left(\frac{\sqrt{90}}{2}\right)^2}{2} = \frac{45\pi}{4}$.

- $\frac{\text{aire de } ABC}{\text{aire du demi-disque}} = \frac{\frac{45}{2}}{\frac{45\pi}{4}} = \frac{2}{\pi}$

  $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}637 = 63{,}7\ \%$

  Donc, ABC occupe environ 63,7 % de son demi-disque circonscrit.

---

6. $\begin{cases} \overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} 13-3 \\ 4-8 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{TU}\begin{pmatrix} 18-(-2) \\ -3-5 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{TU}\begin{pmatrix} 20 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases}$

donc $\overrightarrow{TU} = 2\,\overrightarrow{RS}$ → On pouvait calculer $10\times(-8) - (-4)\times 20$, mais c'est plus long.

donc $\overrightarrow{TU}$ et $\overrightarrow{RS}$ colinéaires

donc $(TU)\ //\ (RS)$.

---

7. $\begin{cases} \overrightarrow{CG}\begin{pmatrix} 4-(-3) \\ 2-(-3) \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{CG}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{CW}\begin{pmatrix} 39-(-3) \\ 27-(-3) \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{CW}\begin{pmatrix} 42 \\ 30 \end{pmatrix} \end{cases}$

donc $\overrightarrow{CW} = 6\,\overrightarrow{CG}$ → On pouvait aussi calculer $7\times 30 - 5\times 42$.

$\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CW}$ colinéaires

donc C , G et W sont alignés.

---

8. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 4-(-5) \\ 9-(-3) \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$

$9\times 0{,}8 - 12\times 0{,}6 = 7{,}2 - 7{,}2 = 0$

donc $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires

donc $\overrightarrow{w}$ vecteur directeur de (MN) .

De plus : $\|\overrightarrow{w}\| = \sqrt{0{,}6^2 + 0{,}8^2} = \sqrt{0{,}36 + 0{,}64} = 1$

donc $\overrightarrow{w}$ vecteur directeur unitaire de (MN) .

---

9. Pour tout réel k , on a :

$$\begin{aligned}(k^2 + k + 1)\times(k - 1) - 1\times(k^3 - 1) &= k^3 - k^2 + k^2 - k + k - 1 - k^3 + 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont toujours colinéaires.

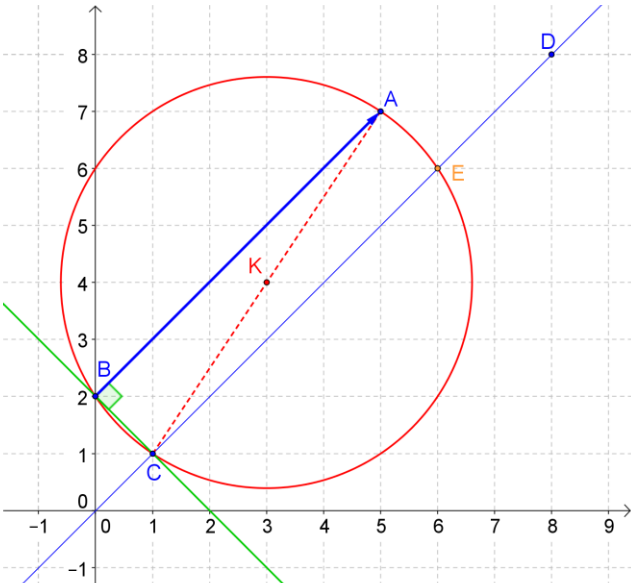
---

10. *a)* $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-5\\2-7\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix} \\ \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}8-1\\8-1\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix} \end{cases}$

donc $-\frac{1}{5}\ \overrightarrow{AB} = \frac{1}{7}\ \overrightarrow{CD}$

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

donc $\overrightarrow{AB}$ vecteur directeur de (CD).



b) K milieu de $[AC]$

donc $K\left(\frac{5+1}{2} ; \frac{7+1}{2}\right)$ et donc $K(3 ; 4)$.

c) $AK = \sqrt{(3-5)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$BK = \sqrt{(3-0)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

donc $AK = BK$

donc $B \in (\mathscr{C})$.

d) $\begin{cases} K \text{ milieu de } [AC] \Rightarrow [AC] \text{ diamètre de } (\mathscr{C}) \\ B \in (\mathscr{C}) \end{cases}$

donc ABC rectangle en B

donc $(AB) \perp (BC)$.

e) $\begin{cases} \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix} \text{ donc } \frac{5}{7}\ \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} \text{ et donc } \overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} \end{cases}$

On en déduit : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$

et donc $ABCE$ est un parallélogramme.

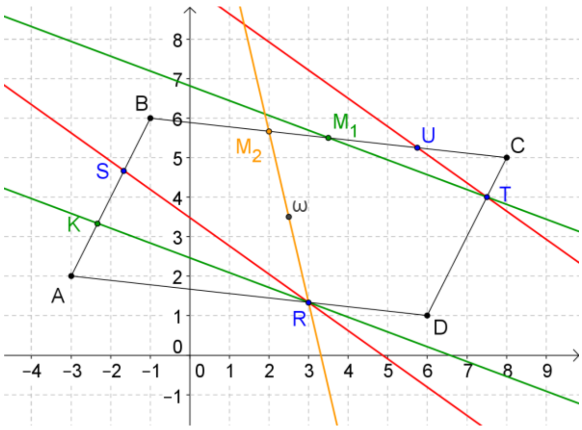
f) $ABCE$ parallélogramme et $(AB) \perp (BC)$

donc $ABCE$ rectangle.

---

11. *a)* Posons $(x ; y)$ les coordonnées de D.

On a alors : $\begin{cases} \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} \\ \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x-8\\y-5\end{pmatrix} \end{cases}$



$ABCD$ parallélogramme

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-8=-2 \\ y-5=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$

Donc $D(6 ; 1)$.

b) Ω centre du parallélogramme $ABCD$

donc Ω milieu de la diagonale $[AC]$

donc $\Omega\left(\frac{-3+8}{2} ; \frac{2+5}{2}\right)$

donc $\Omega\left(\frac{5}{2} ; \frac{7}{2}\right)$

c) • Posons $(x_R ; y_R)$ les coordonnées de R.

On a alors : $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}9\\-1\end{pmatrix}$;$3\ \overrightarrow{RD}\begin{pmatrix}3(6-x_R)\\3(1-y_R)\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} = 3\ \overrightarrow{RD}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 = 3(6-x_R) \\ -1 = 3(1-y_R) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_R = 3 \\ y_R = \frac{4}{3} \end{cases}$

Donc $R\left(3 ; \frac{4}{3}\right)$.

Question, il faut bien avouer, un peu fastidieuse et répétitive...

- Posons $(x_S \,;\, y_S)$ les coordonnées de S.

On a alors : $\begin{cases} \overrightarrow{AS} \begin{pmatrix} x_S + 3 \\ y_S - 2 \end{pmatrix} \\ 2\ \overrightarrow{SB} \begin{pmatrix} 2\,(-1 - x_S) \\ 2\,(6 - y_S) \end{pmatrix} \end{cases}$

$\overrightarrow{AS} = 2\ \overrightarrow{SB}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_S + 3 = 2\,(-1 - x_S) \\ y_S - 2 = 2\,(6 - y_S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_S = -\dfrac{5}{3} \\ y_S = \dfrac{14}{3} \end{cases}$

Donc $S\,(-\dfrac{5}{3} \,;\, \dfrac{14}{3})$.

- Posons $(x_T \,;\, y_T)$ les coordonnées de T.

On a alors : $\begin{cases} \overrightarrow{DT} \begin{pmatrix} x_T - 6 \\ y_T - 1 \end{pmatrix} \\ \dfrac{3}{4}\,\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4} \times 2 \\ \dfrac{3}{4} \times 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

$\overrightarrow{DT} = \dfrac{3}{4}\ \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_T - 6 = \dfrac{3}{4} \times 2 \\ y_T - 1 = \dfrac{3}{4} \times 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_T = \dfrac{15}{2} \\ y_T = 4 \end{cases}$

Donc $T\,(\dfrac{15}{2} \,;\, 4)$.

- Posons $(x_U \,;\, y_U)$ les coordonnées de U.

On a alors : $\begin{cases} \overrightarrow{UB} \begin{pmatrix} -1 - x_U \\ 6 - y_U \end{pmatrix} \\ -3\ \overrightarrow{UC} \begin{pmatrix} -3\,(8 - x_U) \\ -3\,(5 - y_U) \end{pmatrix} \end{cases}$

$\overrightarrow{UB} = -3\ \overrightarrow{UC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x_U = -3\,(8 - x_U) \\ 6 - y_U = -3\,(5 - y_U) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_U = \dfrac{23}{4} \\ y_U = \dfrac{21}{4} \end{cases}$

Donc $U\,(\dfrac{23}{4} \,;\, \dfrac{21}{4})$.

d) $\begin{cases} \overrightarrow{SR} \begin{pmatrix} 14/3 \\ -10/3 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{TU} \begin{pmatrix} -7/4 \\ 5/4 \end{pmatrix} \end{cases}$

$\dfrac{14}{3} \times \dfrac{5}{4} - (-\dfrac{10}{3}) \times (-\dfrac{7}{4}) = \dfrac{35}{6} - \dfrac{35}{6} = 0$

donc $\overrightarrow{SR}$ et $\overrightarrow{TU}$ sont colinéaires,
donc (SR) et (TU) sont parallèles.

e)

- K milieu de $[AS]$ $\Rightarrow K\,\left(\dfrac{-3 - \frac{5}{3}}{2} \,;\, \dfrac{2 + \frac{14}{3}}{2}\right) \Rightarrow K\,(-\dfrac{7}{3} \,;\, \dfrac{10}{3})$

- Posons $(x_M \,;\, y_M)$ les coordonnées de M.

On a alors : $\begin{cases} \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x_M + 1 \\ y_M - 6 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ donc } m\ \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 9m \\ -m \end{pmatrix} \end{cases}$

$\overrightarrow{BM} = m\ \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M + 1 = 9m \\ y_M - 6 = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 9m - 1 \\ y_M = -m + 6 \end{cases}$

Donc $M\,(9m - 1 \,;\, -m + 6)$.

f) $\begin{cases} \overrightarrow{KR}\begin{pmatrix} 16/3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{MT}\begin{pmatrix} 15/2 - (9m-1) \\ 4 - (-m+6) \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{MT}\begin{pmatrix} 17/2 - 9m \\ m-2 \end{pmatrix} \end{cases}$

(KR) et (MT) parallèles

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{KR}$ et $\overrightarrow{MT}$ colinéaires

$\Leftrightarrow (\frac{17}{2} - 9m) \times (-2) - (-2+m) \times \frac{16}{3} = 0$

$\Leftrightarrow -17 + 18m + \frac{32}{3} - \frac{16}{3}m = 0$

$\Leftrightarrow \frac{38}{3}m = \frac{19}{3}$

$\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

g) $\begin{cases} \overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} 9m - 7/2 \\ 5/2 - m \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{\Omega R}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -13/6 \end{pmatrix} \end{cases}$

Ω est sur (MR)

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega R}$ colinéaires

$\Leftrightarrow (9m - \frac{7}{2}) \times (-\frac{13}{6}) - (\frac{5}{2} - m) \times \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{39}{2}m + \frac{91}{12} - \frac{5}{4} + \frac{1}{2}m = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{38}{2}m = -\frac{19}{3}$

$\Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$